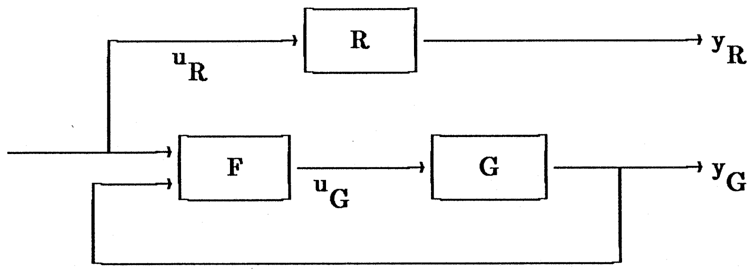
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΙΙ



Α. Ι. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ

Ν.Π.Καραμπετάκης
Μεταπτ. Σπουδαστής Α.Π.Θ.
Υπότροφος Ι.Κ.Υ.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΕΚΔΟΣΗ : ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

§1. Ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα πινάκων.

Ορισμός *Εστω ένας πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Η *ορίζουσα του πίνακα* $\lambda I_n - A$:

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A|$$

ονομάζεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Ονομάζουμε* ***ιδιοτιμή*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με πολλαπλότητα κ ονομάζεται* ***ιδιοτιμή πολλαπλότητας κ*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Εστω μια ιδιοτιμή* λ_0 *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *πολλαπλότητας κ και* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ *οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων* :

$$(\lambda_0 I_n - A)\beta_0 = 0 \qquad (\lambda_0 I_n - A)\beta_{i+1} = -\beta_i \quad i=1,2,..,\kappa-1 \quad \beta_i \neq 0$$

Το *διάνυσμα* β_0 *ονομάζεται* ***δεξιό ιδιοάνυσμα*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* λ_0 *ενώ τα ιδιοανύσματα* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ *ονομάζονται* ***γενικευμένα δεξιά ιδιοανύσματα*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* λ_0. □

Παράδειγμα 1 *Δίνεται ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα* A *θα είναι* :

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} = (\lambda-3)^3$$

και συνεπώς έχουμε μια ιδιοτιμή την $\lambda=3$ *πολλαπλότητας* 3. *Εστω η παρακάτω εξίσωση* :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x_1 + x_2 = 3x_1 \\ 3x_2 + x_3 = 3x_2 \\ 3x_3 \qquad = 3x_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0 \ \ \textit{και} \ \ x_3 = 0$$

Αρα ένα ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=3$ *είναι το*

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τα γενικευμένα ιδιοανύσματα του πίνακα A *που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* $\lambda=3$ *θα είναι λύσεις των παρακάτω συστημάτων* :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

Παράδειγμα 2 *Δίνεται ο πίνακας* :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι* :

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

και συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\{+i, -i\}$. Εστω *η παρακάτω εξίσωση* :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = i\, x_1 \\ -x_1 = i\, x_2 \end{Bmatrix}$$

και συνεπώς ένα ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=i$ *είναι το*

$$\beta_i = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Ομοια βρίσκουμε ότι ένα ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=-i$ είναι το

$$\beta_{-i} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$ □

Σημείωση Πολλές φορές είναι δυνατό για μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ_0 ο διανυσματικός χώρος που αποτελείται από διανύσματα που ικανοποιούν την σχέση $(\lambda_0 I_n - A)\beta_0 = 0$ να έχει διάσταση μεγαλύτερη από ένα έστω ℓ. Στην περίπτωση αυτή διαλέγω ένα δεξιό ιδιοάνυσμα έστω β_{01} από τα ℓ που παράγουν αυτόν τον διανυσματικό χώρο και στην συνέχεια βρίσκω το μέγιστο πλήθος, έστω ℓ_1-1, γραμμικά ανεξάρτητων γενικευμένων δεξιών ιδιοανυσμάτων που προκύπτουν από αυτό το ιδιοάνυσμα, βάση της σχέσεως $(\lambda_0 I_n - A)\beta_{i+1} = -\beta_i$ $i=1,2,..,\kappa-1$. Στην συνέχεια βρίσκω ένα δεξιό ιδιοάνυσμα έστω β_{02} γραμμικά ανεξάρτητο του β_{01} και βάσει αυτού βρίσκω το μέγιστο πλήθος γενικευμένων δεξιών ιδιοανυσμάτων που προκύπτουν από αυτό έστω ℓ_2-1 κ.ο.κ. εως ότου εξαντλήσω και τα ℓ δεξιά ιδιοανύσματα που παράγουν τον χώρο των δεξιών ιδιοανυσμάτων. Στην περίπτωση αυτήν λέμε ότι έχουμε την ιδιοτιμή λ_0 με πολλαπλότητες ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_l αντίστοιχα. Εαν ανακατατάξω τις τιμές ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_l κατά αύξουσα σειρά έστω $\hat{\ell}_1$, $\hat{\ell}_2$, ..., $\hat{\ell}_l$ τότε λέμε ότι τα πολυώνυμα $(\lambda-\lambda_0)^{\ell_1}$, $(\lambda-\lambda_0)^{\ell_2}$, ...,$(\lambda-\lambda_0)^{\ell_l}$ είναι **στοιχειώδεις διαιρέτες** του πίνακα A.

Παράδειγμα 3 Εστω ο πίνακας :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A θα είναι :

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^3$$

και συνεπώς έχουμε μια ιδιοτιμή την $\lambda=2$. *Εστω η παρακάτω εξίσωση* :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x_1 + x_2 = 2\,x_1 \\ 2x_2 = 2\,x_2 \\ 2x_3 = 2\,x_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Αρα ο *χώρος των δεξιών ιδιοανυσμάτων είναι* ο :

$$\mathcal{X} = \{\ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \text{όπου } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \}$$

Εστω *το δεξιό ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην τιμή* $\lambda=2$ *είναι το*

$$\beta_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τα *γενικευμένα ιδιοανύσματα του πίνακα* A *που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* $\lambda=2$ *και στο δεξιό ιδιοάνυσμα* β_{01} *θα είναι η λύση του παρακάτω συστήματος* :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_{11} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$$

Παρατηρώ *ότι εαν προσπαθήσω να βρώ ένα δεύτερο γενικευμένο ιδιοάνυσμα έχω ότι* :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = a \\ 0 = 1 \\ b = 0 \end{Bmatrix}$$

που είναι άτοπο. Ενα *δεύτερο δεξιό ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda=2$ *είναι* *όπως είδαμε το*

$$\beta_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δεν υπάρχει γενικευμένο δεξιό ιδιοάνυσμα που να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda=2$ *και στο ιδιοάνυσμα* β_{02} *γιατί το σύστημα μου :*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = \gamma \\ x_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{Bmatrix}$$

είναι μη συμβιβαστό και συνεπώς δεν έχει λύση. □

<u>***Διαγωνοποίηση πίνακα***</u>

Εστω *ένας πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *και* $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$ *ιδιοτιμές του πίνακα* A πολλαπλότητας $\mu_1, \mu_2, .., \mu_k$ *αντίστοιχα* $(\mu_1+\mu_2+..+\mu_k=n)$. Εστω *επίσης* $u_{01}, u_{11}, u_{21}, .., u_{\mu_1-1,1}$, $u_{02}, u_{12}, u_{22}, .., u_{\mu_2-1,1}, \dots, u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}, .., u_{\mu_k-1,1}$ *τα δεξιά ιδιοανύσματα του πίνακα* A *που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$. *Θεωρείστε τον πίνακα :*

$$U = [u_{01}, u_{11}, u_{21}, .., u_{\mu_1-1,1}, u_{02}, u_{12}, u_{22}, .., u_{\mu_2-1,1}, \dots, u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}, .., u_{\mu_k-1,1}]$$

ο οποίος *είναι αντιστρέψιμος και έστω* ο *πίνακας*

$$V = U^{-1} = \begin{bmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow v_n \longrightarrow \end{bmatrix}$$

Τα *διανύσματα γραμμών του* V $v_{01}, v_{11}, v_{21}, .., v_{\mu_1-1,1}$, $v_{02}, v_{12}, v_{22}, .., v_{\mu_2-1,1}, \dots$, $v_{0k}, v_{1k}, v_{2k}, .., v_{\mu_k-1,1}$ *είναι τα αριστερά ιδιοανύσματα του* A *και επιπλέον ισχύει η σχέση :*

$$V\,A\,U = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \quad \text{όπου } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad i=1,2,..,k$$

Παράδειγμα 4 Να *διαγωνιοποιειθεί* ο *παρακάτω πίνακας* :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω πίνακα είναι* :

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

και συνεπώς ο *πίνακας* A *έχει ως ιδιοτιμές την* $\lambda=0$ *πολλαπλότητας* 2 *και την* $\lambda=1$ *πολλαπλότητας* 1. Εστω *η παρακάτω εξίσωση* :

$$A\,\beta_{00} = 0\,\beta_{00} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \;\; \text{και} \;\; x_3 = 0$$

και συνεπώς ένα από τα δεξιά ιδιοάνυσματα β_0 *που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* $\lambda=0$ *θα είναι το*

$$\beta_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το *γενικευμένο δεξιό ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda=0$ *είναι μια λύση της παρακάτω εξίσωσης* :

$$A\,\beta_{10} = 0\,\beta_{10} + \beta_{00} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 1 \;\; \text{και} \;\; x_3 = -1$$

και συνεπώς ένα από τα δεξιά γενικευμένα ιδιοανύσματα β_1 *που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* λ=0 *είναι το* :

$$\beta_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Κατά *τον ίδιο τρόπο ένα από τα ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* λ=1 *είναι μια λύση της εξίσωσης* :

$$A\,\beta_{01} = 1\,\beta_{01} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \ \ \textit{και} \ \ x_2 = 0$$

και συνεπώς

$$\beta_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο *αντίστροφος του* U *είναι* ο

$$V = U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς τα αριστερά ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ=0 *είναι τα* :

$$v_{00} = [0 \ \ 1 \ \ 0] \quad \textit{και} \quad v_{10} = [1 \ \ 0 \ \ 0]$$

ενώ το αριστερό ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=1 *είναι το*

$$v_{01} = [1 \ \ 0 \ \ 1]$$

Ο *πίνακας* A *διαγωνοποιείται κατά τον παρακάτω τρόπο* :

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = V\,A\,U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

Σημείωση *Στην περίπτωση που ο δεξιά μηδενικός χώρος του πίνακα* $(\lambda_0 I_n - A)$, *όπου* λ_0 *είναι μια ιδιοτιμή του* A, *έχει διάσταση μεγαλύτερη του* 1 *έστω* ℓ *τότε βρίσκουμε ένα δεξιό ιδιοάνυσμα έστω* β_{01} *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* λ_0 *και ακολούθως όλα τα δεξιά γενικευμένα ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν στο ιδιοάνυσμα* β_{01} *και στην ιδιοτιμή* λ_0 *έστω* β_{11}, β_{21}, ..., $\beta_{f_1 1}$. *Στην συνέχεια βρίσκω ένα δεξιό ιδιοάνυσμα* β_{02} *γραμμικό ανεξάρτητο του* β_{01} *και ακολούθως τα δεξιά γενικευμένα ιδιοανύσματα* β_{12}, β_{22}, ..., $\beta_{f_2 2}$ *κ.ο.κ εως το δεξιό ιδιοάνυσμα* β_{0l} *και τα δεξιά γενικευμένα ιδιοανύσματα αυτού. Στην ιδιοτιμή λοιπόν* λ_0 *θα αντιστοιχώ το παρακάτω μέρος του πίνακα :*

$$\tilde{U} = [\beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{f_1 1}, \beta_{02}, \beta_{12}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{f_2 2}, \ldots, \beta_{0l}, \ldots, \beta_{f_l l}]$$

και στην τελική διαγωνοποίηση του A *αντί του διαγώνιου πίνακα :*

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\Sigma f_i)\times(\Sigma f_i)}$$

που θα έπρεπε να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 *έχω τον πίνακα :*

$$\left[\begin{array}{c:c} f_1\left\{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{matrix}\right. & 0 \\ \hdashline 0 & \left.\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdot & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_0 \end{matrix}\right\} f_l \end{array}\right]$$

Παράδειγμα 5 *Δίνεται ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω πίνακα είναι* :

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda & 1/3 & -2/3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 6 & -1 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^3$$

και συνεπώς ο *πίνακας* A *έχει ως ιδιοτιμή την* $\lambda=2$. Εστω *η παρακάτω εξίσωση* :

$$A\,\beta_{01} = 2\,\beta_{01} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 6\alpha-2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς ένα από τα δεξιά ιδιοανύσματα β_0 *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda=2$ *είναι το*

$$\beta_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{για } \alpha=1,\ \beta=3$$

Το *γενικευμένο δεξιό ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda=0$ *και στο ιδιοάνυσμα* β_{01} *είναι μια λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων* :

$$A\,\beta_{11} = 2\,\beta_{11} + \beta_{01} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ 3+6\hat{\alpha}-2\hat{\beta} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

και συνεπώς ένα από τα δεξιά γενικευμένα ιδιοανύσματα β_{11} *που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή* $\lambda=0$ *είναι το* :

$$\beta_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{για } \hat{\alpha}=0 \text{ και } \hat{\beta}=1$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει άλλο δεξιό γενικευμένο ιδιοάνυσμα β_{21} *διότι το παρακάτω σύστημα εξισώσεων :*

$$\mathrm{A}\ \beta_{21} = 2\ \beta_{21} + \beta_{11} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ 3+6\hat{\alpha}-2\hat{\beta} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + 6\hat{\alpha} - 2\hat{\beta} = 0 \quad \text{και} \quad 3\hat{\alpha} = \hat{\beta} \Longrightarrow 3=0$$

είναι ασυμβίβαστο. Ενα *δεύτερο δεξιό ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda=2$ *είναι το :*

$$\beta_{12} = = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{για } \alpha=0,\ \beta=1$$

και συνεπώς :

$$\mathrm{U} = \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

που έχει αντίστροφο τον πίνακα :

$$\mathrm{V} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1/3 & 1/3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Τελικά *θα έχουμε ότι :*

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} \mathrm{J}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \mathrm{V\ A\ U} \qquad \square$$

Εύρεση δυνάμεως ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Οπως είδαμε προηγουμένως ισχύει η σχέση :

$$J = V\,A\,U = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \quad \text{όπου } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_i \times \sigma_i} \quad i=1,2,..,k$$

όπου σ_i πολ/τα ιδιοτιμής λ_i, $V = U^{-1}$ και συνεπώς :

$$A = U\,J\,U^{-1} \Longrightarrow A^2 = (U\,J\,U^{-1})\,(U\,J\,U^{-1}) = U\,J^2\,U^{-1} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow$$

$$A^n = U\,J^n\,U^{-1}$$

όπου :

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k^n \end{bmatrix}$$

και

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{\sigma_i-1}\lambda_i^{n-k+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{\sigma_i-2}\lambda_i^{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_i^{\phi}=0 \text{ για } \phi<0 \\ i=1,2,..,k \end{matrix}$$

Παράδειγμα 6 Να βρεθεί ο πίνακας :

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

Εχω από το παράδειγμα 3 ότι :

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = V\,A\,U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς $A^0=I$, $A^1=A$ *και*

$$A^n = U\,J^n\,V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1^n \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad n>1 \qquad \square$$

Παράδειγμα 7 Να *βρεθεί* ο *πίνακας* :

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}^n$$

Εχω *από το παράδειγμα* 5 *ότι* :

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = V\,A\,U = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1/3 & 1/3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

και συνεπώς $A^0=I$, $A^1=A$ *και*

$$A^n = U\,J^n\,V = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]^n \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1/3 & 1/3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 2^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1/3 & 1/3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (1-n)2^n & (n/3)2^{n-1} & (n/3)2^n \\ -2^{n+2} & 2^n & 0 \\ -3n2^n & n2^{n-1} & (n+2)2^{n-1} \end{bmatrix} \quad n>1 \qquad \square$$

<u>**Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.</u>

Θεώρημα Εστω *ένας πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και*

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \lambda^n I_n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα αυτού. Η *εξίσωση* :

$$\lambda^n I_n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

ονομάζεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** *του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Κάθε πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση.* $\square$

Ενα άμεσο αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι αν η χαρακτηριστική εξίσωση ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι η παραπάνω τότε ισχύει η σχέση :

$$A^n I_n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$I_n = -\frac{1}{\alpha_0}\left[A^{n-1}I_n + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I_n\right] A$$

και συνεπώς ο πίνακας :

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}\left[A^{n-1}I_n + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I_n\right]$$

είναι ο αντίστροφος του πίνακα A. Στην περίπτωση που $\alpha_0=0$ έχω ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος γιατί το 0 είναι μια από τις ιδιοτιμές του όπως στο παράδειγμα 3.

Παράδειγμα 8 Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι :

$$a(\lambda) = \det|\lambda I_n - A| = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-1) = \lambda^3 - 2\lambda + 1$$

και συνεπώς έχουμε ότι :

$$A^3 - 2A + I_3 = 0 \Longrightarrow A\,(-A^2 + 2I_3) = I_3 \Longrightarrow A^{-1} = -A^2 + 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

§2. Ο πίνακας e^{At}.

Ορισμός *Για έναν τετραγωνικό πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ορίζουμε :*

$$e^{At} = I_n + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n t^n \qquad \square$$

Η *σειρά του δεξιού μέλους συγκλίνει για κάθε* A *και* t *και συνεπώς ο πίνακας* e^{At} *ορίζεται για κάθε τετραγωνικό πίνακα* A.

Μέθοδοι υπολογισμού του πίνακα e^{At}.

1η Μέθοδος Υπολογίζω *τον πίνακα :*

$$(sI_n - A)^{-1}$$

και ακολούθως βρίσκω τον e^{At} *από την σχέση :*

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\}$$

όπου $\mathcal{L}\{\cdot\}$ *δηλώνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό* Laplace.

Υπολογισμός $(sI_n - A)^{-1}$ (Faddeev method)

Αρχική Συνθήκη

$$R_0 = I_n$$

Επαναλήψεις

$$\alpha_1 = -\,\mathrm{tr}[A], \qquad R_1 = AR_0 + a_1 I_n$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[AR_1] \qquad R_2 = AR_1 + a_2 I_n$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n-1}\,\mathrm{tr}[AR_{n-1}] \qquad R_{n-1} = AR_{n-2} + a_{n-1} I_n$$

Τελική συνθήκη

$$R_n = AR_{n-1} + a_n I_n$$

$$a(s) = \det|sI_n - A| = s^n I_n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}\left[R_0\, s^{n-1} + R_1 s^{n-2} + \cdots + R_{n-2}s + R_{n-1}\right] \qquad \square$$

Παράδειγμα 9 *Να βρεθεί ο πίνακας* e^{At} *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα :

$$(sI_n - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

και συνεπώς εαν συμβουλευτούμε έναν πίνακα αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace *έχουμε ότι :*

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \square$$

<u>$2^{\underline{η}}$ Μέθοδος</u> *Παρατηρούμε από τον ορισμό του πίνακα* e^{At} *ότι για οποιοδήποτε τετράγωνο πίνακα* U *ισχύει :*

$$e^{(VAU)t} = V\, e^{At}\, U$$

όπου $V = U^{-1}$ *και συνεπώς εαν πάρω ως πίνακα* U *τον πίνακα που αποτελείται από τα δεξιά ιδιοανύσματα του* A *θα έχω (δες §1) ότι :*

$$e^{Jt} = e^{(VAU)t} = V\, e^{At}\, U \Longrightarrow e^{At} = U\, e^{Jt}\, U^{-1}$$

όπου

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_k t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad e^{J_i t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu_i - 2}}{(\mu_i - 2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

Παράδειγμα 10 Να υπολογισθεί ο πίνακας e^{At} όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εχω από το παράδειγμα 3 ότι :

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = V\,A\,U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς

$$e^{At} = U\,e^{Jt}\,U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} e^{0t} & te^{0t} & 0 \\ 0 & e^{0t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{1t} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -1+e^{t} & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \qquad \square$$

<u>$3^{\underline{\eta}}$ Μέθοδος</u> Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ορίζουμε :

$$r(\lambda) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

τότε για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i(t)$ του At ((ιδιοτιμή λ_i του A) $\times$ t) πολλαπλότητας k έχουμε ότι :

$$e^{\lambda_i(t)} = r(\lambda_i(t))$$
$$e^{\lambda_i(t)} = \frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i(t)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{\lambda_i(t)} = \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} r(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i(t)}$$

Ο πίνακας e^{At} γράφεται ως :

$$e^{At} = \alpha_{n-1}A^{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2}t^{n-2} + \cdots + \alpha_1 At + \alpha_0 I_n$$

όπου οι συναρτήσεις $\alpha_i(t)$ i=0,1,2,...,n−1 υπολογίζονται από τις παραπάνω σχέσεις.

Παράδειγμα 11 Βρείτε τον πίνακα e^{At} εαν :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Εχουμε n=3 και συνεπώς :

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I_3 =$$

$$= \alpha_2 \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} t^2 + \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} t + \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9\alpha_2 t^2+3\alpha_1 t+\alpha_0 & 6\alpha_2 t^2+\alpha_1 t & \alpha_2 t^2 \\ 0 & 9\alpha_2 t^2+3\alpha_1 t+\alpha_0 & 6\alpha_2 t^2+\alpha_1 t \\ 0 & 0 & 9\alpha_2 t^2+3\alpha_1 t+\alpha_0 \end{bmatrix}$$

και

$$r(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$r^{(1)}(\lambda) = 2\alpha_2 \lambda + \alpha_1$$

$$r^{(2)}(\lambda) = 2\alpha_2$$

Εχουμε την ιδιοτιμή $\lambda_0=3$ πολλαπλότητας 3 και συνεπώς ο πίνακας At έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda=3t$ πολλαπλότητας 3 :

$$e^{3t} = \alpha_2 9t^2 + \alpha_1 3t + \alpha_0$$

$$e^{3t} = \alpha_2 6t + \alpha_1$$

$$e^{3t} = 2\alpha_2$$

και συνεπώς :

$$\alpha_2 = \frac{e^{3t}}{2} \quad \alpha_1 = (1-3t)e^{3t} \quad \alpha_0 = (1-3t+\frac{9}{2}t^2)\,e^{3t}$$

Τελικά έχουμε :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

όπως αναφέραμε και στην μέθοδο 2 (δες e^{Jt}). □

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Ασκηση 1 Να *υπολογισθεί ο πίνακας* A^n *όπου*

$$\alpha)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 2 Να *δειχθεί ότι η ιδιότητα* :

$$e^{At}\, e^{Bt} = e^{(A+B)t}$$

ισχύει όταν και μόνο όταν οι πίνακες A *και* B *αντιμετατίθονται.*

Ασκηση 3 Να *βρεθεί ο πίνακας* e^{At} *όταν*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιόντας και τις τρεις μεθόδους που αναφέραμε στο §2 *κεφάλαιο.*

Ασκηση 4 *Δείξτε ότι* :

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^n}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

εαν

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Ασκηση 5 *Αποδείξτε την λογική της μεθόδου* 3 *στην εύρεση του πίνακα* e^{At}.

Ασκηση 6 Να *αποδειχθεί ο αλγόριθμος* (Faddeev method) *εύρεσης του αντίστροφου του πολυωνυμικού πίνακα* (sI_n-A) *όπου* $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

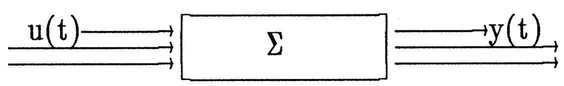
Ασκηση 7 *Να βρείτε δυο αντιστρέψιμους πίνακες* U *και* V *τέτοιους ώστε* :

$$U\begin{bmatrix} \Lambda & \overbrace{I_2 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0}^{2k} & 0 \\ 0 & \Lambda \;\; I_2 \;\; \cdots \;\; 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \;\;\; \vdots \;\;\; \ddots \;\;\; \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \;\;\; 0 \;\; \cdots \;\; \Lambda & I_2 \\ 0 & 0 \;\;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 & \Lambda \end{bmatrix} V = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \alpha+i\beta & & 0 \\ & \alpha+i\beta & \\ 0 & & \ddots \; \alpha+i\beta \end{matrix}}^{k} & \overbrace{\begin{matrix} \quad & 0 & \quad \end{matrix}}^{k} \\ \hline 0 & \begin{matrix} \alpha-i\beta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha-i\beta \end{matrix} \end{array}\right] \; ; \; \Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Τι συμπεραίνεται για την διαγωνοποίηση ενός πίνακα εαν έχει ιδιοτιμές μιγαδικούς αριθμούς πολλαπλότητας k.

<u>§3 Περιγραφή Γραμμικών Πολυμεταβλητών Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.</u>

Με τον όρο περιγραφή ενός συστήματος εννοούμε, γενικά, μια μαθηματική σχέση που συνδέει φυσικές ποσότητες και στοιχεία ενός συστήματος. Η *μαθηματική αυτή σχέση συνθέτει το* **μαθηματικό μοντέλο ή πρότυπο** *του συστήματος. Ενα σύστημα σε λειτουργία περιλαμβάνει τα εξής τρία στοιχεία : την είσοδο* u(t) (*διέγερση*), *το σύστημα* Σ, *την έξοδο* y(t) (*απόκριση ή συμπεριφορά*) *του συστήματος.*



Ενα ***σύστημα*** *δηλαδή είναι μια απεικόνιση* f: X ⟶ Y *όπου* X *είναι ο χώρος εισόδων και* Y *είναι ο χώρος των εξόδων. Μια ειδική κατηγορία συστημάτων είναι τα* ***γραμμικά συστήματα*** *και είναι αυτά για τα οποία ισχύει :*

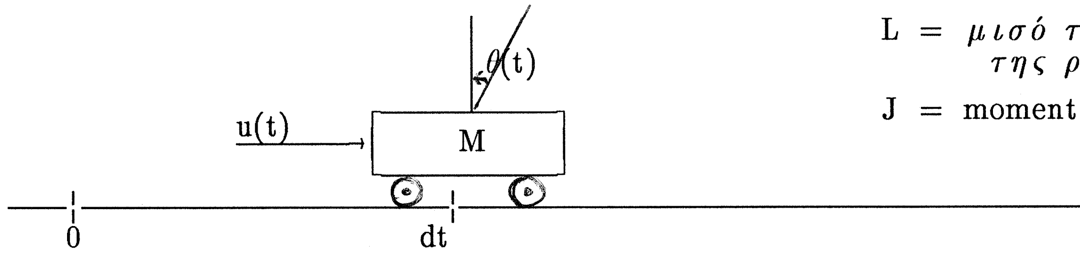
$$\forall\ x_1,x_2 \in X \quad f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \quad \textit{με}\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Εχει δειχθεί ότι πολλά μη γραμμικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε γραμμικά σε μια συγκεκριμένη περιοχή σημείου και να μελετηθούν κάτω από την θεωρία των γραμμικών συστημάτων. Ενας ακόμη διαχωρισμός συστημάτων είναι αυτός των ***πολυμεταβλητών συστημάτων*** (*πολλών εισόδων – πολλών εξόδων*) *και των συστημάτων μιας εισόδου – μιας εξόδου.* Η *γενική κατηγορία των* <u>*γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με σταθερούς συντελεστές*</u>, *περιγράφεται από το παρακάτω μαθηματικό μοντέλο :*

$$A(\rho)\ \beta(t) = B(\rho)\ u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\ \beta(t) + D(\rho)\ u(t)$$

όπου $\rho := d/dt$ *είναι ο τελεστής διαφόρισης,* $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}(\rho)}A(\rho)=r$, $B(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$, $C(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times r}$, $D(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$, $u(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t)\in C_p^i$ *και* $\rho^i u(t)|_{t=0}$ $=: u(0-)^{(i)}$, $i=1,2,..,q$ *είναι γνωστά για κάποια* $q\in\mathbb{N}$, $\beta(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{r}$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{p}$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου***.

Παράδειγμα 12 Το *παρακάτω δυναμικό σύστημα* :



L = *μισό του μήκους της ράβδου*

J = moment of inertia

περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :

$$(J+mL^2)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - mgL\sin\theta(t) + mL\frac{d^2d(t)}{dt^2}\cos\theta(t) = 0$$
$$(M+m)\frac{d^2d(t)}{dt^2} + mL\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = u(t)$$
$$y(t) = d(t)$$

Εαν *υποθέσουμε ότι η γωνία* $\theta(t)$ *είναι πολύ μικρή έχουμε ότι* $\sin\theta(t) \cong \theta(t)$ *και* $\cos\theta(t) \cong 1$ *και συνεπώς το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα είναι* :

$$(J+mL^2)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - mgL\,\theta(t) + mL\frac{d^2d(t)}{dt^2} = 0$$
$$(M+m)\frac{d^2d(t)}{dt^2} + mL\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = u(t)$$
$$y(t) = d(t)$$

ή ισοδύναμα εαν $\rho := d/dt$ ο *διαφορικός τελεστής* :

$$\begin{bmatrix} (J+mL^2)\rho^2 - mgL & mL\rho^2 \\ mL\rho^2 & (M+m)\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$$

□

Ορισμός *Μια τετράδα πολυωνυμικών πινάκων* $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$, $B(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$, $C(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times r}$, $D(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$ *τέτοια ώστε* $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}(\rho)}A(\rho)=r$ *καλείται* ***Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων*** (Π.Π.Σ.) (Polynomial Matrix Description (PMD)) *του γραμμικού συστήματος* Σ *του οποίου η δυναμική συμπεριφορά διέπεται από το παραπάνω σύνολο των γραμμικών διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων.* □

Το *παραπάνω σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων γράφεται ισοδύναμα* (Verghese 1978) *ως* :

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I_p \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 0 \;\; I_p] \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα :

$$\mathcal{T}(\rho)\ \xi(t) = \mathcal{U}\ u(t)$$

$$y(t) = \mathcal{V}\ \xi(t)$$

όπου :

$$\mathcal{T}(\rho) := \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I_p \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r}\times\tilde{r}} \;;\; \mathcal{U} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r}\times m} \;\;;\;\; \mathcal{V} := [0 \;\; 0 \;\; I_p] \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times\tilde{r}}$$

με $\tilde{r}=r+p+m$ *και* $\xi(t) := [\beta(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T$ *το νέο διάνυσμα ψευδοκατάστασης της καινούργιας περιγραφής.*

Ορισμός Η *περιγραφή πολυωνυμικών πινάκων ενός γραμμικού συστήματος* Σ *της παραπάνω μορφής ονομάζεται* ***Κανονική Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων*** (Κ.Π.Π.Σ.) (Normalized Polynomial Matrix Description (NPMD)) *του γραμμικού συστήματος* Σ. □

Παράδειγμα 13 Η *κανονική πολυωνυμική περιγραφή συστήματος* Σ *του παραδείγματος* 12 *είναι η παρακάτω* :

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} (J+mL^2)\rho^2-mgL & mL\rho^2 & 0 & 0 \\ m\rho^2 & (M+m)\rho^2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \theta(t) \\ d(t) \\ \hline -u(t) \\ \hline y(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1] \left[\begin{array}{c} \theta(t) \\ d(t) \\ \hline -u(t) \\ \hline y(t) \end{array}\right] \qquad \square$$

Εαν *τώρα πάρουμε τους μετασχηματισμούς* Laplace *της πολυωνυμικής περιγραφής του συστήματος υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες δηλ.* $u^{(i)}(0-)=0\in\mathbb{R}^m$, $\beta^{(i)}(0-)=0\in\mathbb{R}^r$ *έχουμε ότι* :

$$A(s)\,\hat{\beta}(s) = B(s)\,\hat{u}(s)$$
$$\hat{y}(s) = C(s)\,\hat{\beta}(s) + D(s)\,\hat{u}(s)$$

όπου $\hat{\beta}(s) := \mathcal{L}\_\{\beta(t)\}$, $\hat{u}(s) := \mathcal{L}\_\{u(t)\}$, $\hat{y}(s) := \mathcal{L}\_\{y(t)\}$ *είναι οι μετασχηματισμοί* Laplace *των* $\beta(t)$, $u(t)$ *και* $y(t)$ *αντίστοιχα. Είναι πολλές φορές βολικότερο να μελετούμε συστήματα στο πεδίο της συχνότητας από ότι στο πεδίο του χρόνου γιατί τότε τα προβλήματα μας ανάγονται σε καθαρά αλγεβρικά προβλήματα.* Η *παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως* :

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix}$$

Ορισμός (Rosenbrock 1970) Ο *πολυωνυμικός πίνακας*

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p)\times(r+m)}$$

που περιέχει όλες τις μαθηματικές πληροφορίες οι οποίες αφορούν την μελέτη του συστήματος ονομάζεται Rosenbrock *πολυωνυμικός πίνακας* (Rosenbrock System Matrix). □

Εαν *τώρα πάρουμε τους μετασχηματισμούς* Laplace *των σχέσεων στην κανονική περιγραφή του συστήματος υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες δηλ.* $u^{(i)}(0-)=0\in\mathbb{R}^m$, $\xi^{(i)}(0-)=0\in\mathbb{R}^{\tilde{r}}$ *τότε έχουμε* :

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p \\ 0 & -I_m & 0^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \hat{u}(s)$$

$$y(t) = [0 \;\; 0 \;\; I_p] \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{\xi}(s) := \mathcal{L}\_\{\xi(t)\}$, $\hat{u}(s) := \mathcal{L}\_\{u(t)\}$, $\hat{y}(s) := \mathcal{L}\_\{y(t)\}$ *είναι οι μετασχηματισμοί* Laplace *των* $\xi(t)$, $u(t)$ *και* $y(t)$ *αντίστοιχα*. Η *παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως* :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A(s) & B(s) & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p & 0 \\ 0 & -I_m & 0^p & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{y}(s) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}(s) & \mathcal{U} \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{y}(s) \end{bmatrix}$$

Ορισμός (Verghese 1979) Ο *πολυωνυμικός πίνακας*

$$\mathcal{P}(s) := \begin{bmatrix} \mathcal{T}(s) & \mathcal{U} \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix}$$

που περιέχει όλες τις μαθηματικές πληροφορίες οι οποίες αφορούν την μελέτη του συστήματος ονομάζεται Κανονικός Πολυωνυμικός Πίνακας *του* Συστήματος. (Normalized System Matrix). □

Παρακάτω θα αναφέρουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω συστημάτων.

Ορισμός *Στην ειδική περίπτωση που η* Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) *έχει την μορφή :*

$$A(s) = sI_r - A \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}\,, \quad B(s) = B \in \mathbb{R}^{r\times m}$$

$$C(s) = C \in \mathbb{R}^{p\times r}, \quad D(s) = D(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *ή ισοδύναμα*

$$P(s) := \begin{bmatrix} sI_r - A & B \\ -C & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p)\times(r+m)}$$

τότε ονομάζουμε την Π.Π.Σ. *ώς* **Π.Π.Σ. *στον χώρο των καταστάσεων*.** Η Π.Π.Σ. *του πίνακα* P(s) *αντιστοιχεί στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + D(\rho)u(t)$$

όπου $x(t):\mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{r}$ *καλείται το διάνυσμα καταστάσεως του* Σ. *Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται **εξισώσεις στον χώρο των καταστάσεων**.* □

Ορισμός *Στην ειδική περίπτωση που η* Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) *έχει την μορφή :*

$$A(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}\,, \quad B(s) = B \in \mathbb{R}^{r\times m}$$

$$C(s) = C \in \mathbb{R}^{p\times r}, \qquad D(s) = D \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

όπου $E \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} E < r$ *και* $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *ή ισοδύναμα*

$$P(s) := \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p)\times(r+m)}$$

τότε ονομάζουμε την Π.Π.Σ. *ώς* **Π.Π.Σ. *στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων*.** Η Π.Π.Σ. *του πίνακα* P(s) *αντιστοιχεί στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :*

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου $x(t):\mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{r}$ *καλείται το διάνυσμα καταστάσεως του* Σ. *Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται* ***εξισώσεις στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.*** □

Ορισμός *Στην ειδική περίπτωση που η* Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) *έχει την μορφή :*

$$A(s) = A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}, \quad B(s) = B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times m}$$
$$C(s) = I_r, \qquad D(s) = 0_{rm}$$

δηλ. r=p *τότε η* Π.Π.Σ. *ονομάζεται ως* ***Αριστερή* Κλασματική** Π.Π.Σ. *και αντιστοιχεί στις διαφορικές εξισώσεις :*

$$A_1(\rho)\, \beta(t) = B_1(\rho)\, u(t)$$
$$y(t) = \beta(t)$$ □

Ορισμός *Στην ειδική περίπτωση που η* Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) *έχει την μορφή :*

$$A(s) = A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}, \quad B(s) = I_r$$
$$C(s) = B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}, \qquad D(s) = 0_{pr}$$

δηλ. r=m *τότε η* Π.Π.Σ. *ονομάζεται ως* ***Δεξιά* Κλασματική** Π.Π.Σ. *και αντιστοιχεί στις διαφορικές εξισώσεις :*

$$A_2(\rho)\, \beta(t) = u(t)$$
$$y(t) = B_2(\rho)\, \beta(t)$$ □

Σημειώνουμε εδώ ότι όλες οι παραπάνω περιγραφές γραμμικών συστημάτων μπορούν να θεωρηθούν ως υποπεριπτώσεις του γενικού μοντέλου :

$$\begin{aligned} A(\rho)\ \beta(t) &= B(\rho)\ u(t) \\ y(t) &= C(\rho)\ \beta(t) + D(\rho)\ u(t) \end{aligned}$$

όπου $\rho := d/dt$ *είναι* ο *τελεστής διαφόρισης*, $A(\rho)\epsilon\mathbb{R}[\rho]^{r\times n}$,$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}(\rho)}A(\rho)=\ell$, (*δηλ.* ο *πίνακας* $A(\rho)$ *δεν είναι κατά ανάγκη τετράγωνος και αντιστρέψιμος*) $B(\rho)\epsilon\mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$, $C(\rho)\epsilon\mathbb{R}[\rho]^{p\times n}$, $D(\rho)\epsilon\mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$, $u(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t)\epsilon C_p^{i}$ *και* $\rho^{i}u(t)|_{t=0} =: u^{(i)}(0-)$, $i=1,2,..,q$ *είναι γνωστά για κάποια* $q\epsilon\mathbb{N}$, $\beta(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{r}$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{p}$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου***. Ενα *τέτοιο σύστημα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως μια ιδιόμορφη* ομογενή *διαφορική εξίσωση* :

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0$$

Εμείς *θα ασχοληθούμε στα παρακάτω κεφάλαια με την απλή κατηγορία των εξισώσεων στον χώρο καταστάσεων.*

§4. Ελεύθερη απόκριση γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές.

Η ολική απόκριση ενός συστήματος της μορφής :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

χωρίζεται στην ***ελεύθερη απόκριση*** *του συστήματος (εκείνο το μέρος της απόκρισης που οφείλεται σε μηδενική είσοδο) και την* ***δυναμική απόκριση*** *του συστήματος (εκείνο το μέρος της απόκρισης που οφείλεται σε μηδενικές αρχικές συνθήκες). Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις ελεύθερες αποκρίσεις συστημάτων στον χώρο καταστάσεων.*

Στο *κεφάλαιο* 2 *είχαμε ορίσει τον πίνακα* e^{At} *ως* :

$$e^{At} = I_n + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

και συνεπώς :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[e^{At}] &= \frac{d}{dt}[\, I_n + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2t^2 + \cdots \,] = \\ &= A + A^2t + \cdots + A^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots = \\ &= A\,[\, I_n + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2t^2 + \cdots \,] = \\ &= A\, e^{At} \end{aligned}$$

Εστω *τώρα η εξίσωση*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{με } x(0-)=x_0$$

Υποθέτουμε *ότι η λύση της παραπάνω ομογενούς (χωρίς είσοδο) διαφορικής εξίσωσης είναι:*

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0}$$

Τότε *για* t=0− *έχω ότι* :

$$x(0-) = e^{A0}x_0 = I_n\, x_0 = x_0$$

και

$$\frac{d}{dt}[x(t)] = \frac{d}{dt}[e^{At}x_0] = A\, e^{At}x_0 = Ax(t)$$

και άρα πράγματι αυτή είναι η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης Επίσης *έχουμε ότι* :

$$x(t_0) = e^{At_0}x(0-) \Leftrightarrow x(0-) = e^{-At_0}\, x(t_0)$$

και άρα έχουμε την γενική λύση της ομογενούς για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες :

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)}$$

Μια *άλλη μέθοδος προσέγγισης της λύσης της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι με μετασχηματισμούς* Laplace :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} s\, x(s) - x(0-) = A\, x(s) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (sI_n-A)\, x(s) = x(0-) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(s) = (sI_n-A)^{-1}x(0-) \Leftrightarrow$$
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI_n-A)^{-1}]\, x(0-)$$

και αν συνδιάσουμε αυτήν την σχέση με την λύση του συστήματος έχουμε ότι :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[(sI_n-A)^{-1}] = e^{At}}$$

Η *παραπάνω σχέση όπως έχουμε αναφέρει και στο κεφάλαιο* 2 *είναι μια πολύ σημαντική σχέση στην εύρεση του πίνακα* e^{At} *όταν είναι εύκολο να βρεθούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί* Lapace *του πίνακα* $(sI_n-A)^{-1}$. Σε *περιπτώσεις που δεν είναι δυνατές αυτές οι μέθοδοι τότε εφαρμόζουμε την* 2 *και* 3 *μέθοδο του κεφαλαίου* 2. Ο *πίνακας* e^{At} *ονομάζεται και* ***πίνακας μετάβασης*** *του συστήματος γιατί βάσει αυτού πηγαίνουμε από την κατάσταση* $x(0-)$ *στην* $x(t)$ *ή ισοδύναμα από μια κατάσταση* $x(t_0)$ *σε μια κατάσταση* $x(t)$.

Παράδειγμα **14** Να *βρεθεί η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης* :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

με αρχικές συνθήκες $[x_1(0-),\, x_2(0-)]^T = [0 \;\; 1]^T$.

Λύσις *Από το παράδειγμα* 9 *έχουμε ότι* :

$$(sI_n-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

και συνεπώς :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

Α*ρα* :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \qquad \square$$

Θεώρημα Το *σύνολο λύσεων της διαφορικης εξίσωσης* :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

συμβολίζεται με $\mathcal{X}$ *και αποτελεί γραμμικό διανυσματικό χώρο διαστάσεως* $n=\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}$. □

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα και την έννοια του διανυσματικού χώρου είναι ευνόητο ότι κάθε λύση της παραπάνω ομογενούς διαφορικής εξίσωσης γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός n *γραμμικών ανεξαρτήτων λύσεων.* Το *ερώτημα είναι αν είναι δυνατό να βρίσκουμε πάντα μια βάση αυτού του διανυσματικού χώρου λύσεων* ; Πι*ο συγκεκριμένα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι στήλες του πίνακα* e^{At} *ικανοποιούν την ομογενή διαφορική εξίσωση, είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και είναι στο πλήθος* n, *άρα παράγουν τον διανυσματικό χώρο λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.* Μι*α πιο κανονική βάση μπορεί να προκύψει με αλλαγή συντεταγμένων της μορφής* :

$$x(t) = U\, z(t)$$

όπου U *είναι ο πίνακας που προκύπτει από τα δεξιά ιδιοανύσματα του πίνακα* A. Τ*ότε θα έχουμε* :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \Leftrightarrow U\,\dot{z}(t) = A\,U\,z(t) \Leftrightarrow$$

$$\dot{z}(t) = (U^{-1}\,A\,U)\,z(t) \Leftrightarrow$$

$$\dot{z}(t) = J\,z(t)$$

όπου :

$$J = V\,A\,U = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \quad \text{όπου } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad i=1,2,..,k$$

και συνεπώς ο πίνακας e^{Jt} *του οποίου οι στήλες θα αποτελούν το νέο σύστημα συντεταγμένων (την νέα βάση) του συστήματος θα είναι* :

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_k t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad e^{J_i t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu_i - 2}}{(\mu_i - 2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

Παράδειγμα 15 *Εστω η ομογενής διαφορική εξίσωση* :

$$\dot{x}(t) = J\,x(t) \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Εχουμε $n=3$ *και συνεπώς θα έχουμε 3 γραμμικά αναξάρτητα διανύσματα που θα παράγουν τον διανυσματικό χώρο λύσεων* $\mathcal{X}$ *της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Εχουμε ακόμη από το παράδειγμα 10 ότι* :

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

και συνεπώς :

$$\mathcal{X} = < \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}, \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}, \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} > \qquad \square$$

Στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων που δεν θα αναφέρουμε διεξοδικά στα παρακάτω κεφάλαια έχουμε ανάλογα αποτελέσματα. Εστω για παράδειγμα η ομογενής διαφορική εξίσωση :

$$x(k+1) = A\, x(k)$$

ή πιο αναλυτικά :

k=0	$x(1) = A\, x(0-)$
k=1	$x(2) = A\, x(1) = A\,(A\, x(0-)) = A^2\, x(0-)$
k=2	$x(3) = A\, x(2) = A\,(A^2\, x(0-)) = A^3\, x(0-)$
...	....
k	$\boxed{x(k) = A^k\, x(0-)}$

Παράδειγμα 16 Να *βρεθεί η λύση της* ομογενούς *διαφορικής εξίσωσης :*

$$x(k+1) = A\, x(k) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι $[x_1(0-), x_2(0-), x_3(0-)]^T = [1 \;\; 0 \;\; 1]^T$. Από *το παράδειγμα* 6 *έχουμε ότι :*

$$A^0 = I_3,\ A^1 = A \quad \textit{και} \quad A^n = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; n>1$$

και συνεπώς :

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \; k>1$$

□

Τα *διακριτά συστήματα μελετούνται βάση των μετασχηματισμών* z *σε αντίθεση με τα συνεχή συστήματα όπου χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό* Laplace. *Επειδή το κύριο ενδιαφέρον του μαθήματος αυτού είναι τα συνεχή συστήματα δεν θα προχωρήσουμε σε μεγαλύτερη ανάλυση στα διακριτά συστήματα (μετασχηματισμούς* z).

§5. Δυναμική Απόκριση γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές.

Θεωρείστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-At} \{ \dot{x}(t) - Ax(t) \} = e^{-At}Bu(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [e^{-At} x(t)] = e^{-At}Bu(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-At} x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Η *παραπάνω είναι και η δυναμική απόκριση του συστήματος μας.* Η *ολική απόκριση* x(t) *του συστήματος θα είναι :*

$$\boxed{x(t) = x_{\varepsilon\lambda}(t) + x_{\delta\upsilon\nu}(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

ενώ η έξοδος y(t) *του συστήματος θα είναι :*

$$y(t) = C\,x(t) + Du(t) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(t) = C\,e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\,e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}$$

Παράδειγμα 17 Να *βρεθεί η ολική απόκριση* x(t) *και η έξοδος* y(t) *του συστήματος* :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\,0\ 1\ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι $[x_1(0-), x_2(0-), x_3(0-)]^T = [0\ \ 1\ \ 0]^T$ *και* $u(t) = 1$ *για* $t \geq 0-$.

Εχουμε *ότι* :

$$x_{\varepsilon\lambda}(t) = e^{At}x(0-) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

και

$$x_{\delta\upsilon\nu}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau & (t-\tau)^2/2 \\ 0 & 1 & t-\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{3(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 1\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3(t-\tau)}\, d\tau = e^{3t} \frac{1}{(-3)} \int_0^t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3\tau}\, d\tau = -\frac{1}{3} e^{3t} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3\tau} \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{3t} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3\tau} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{1}{3} e^{3t} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Η *ολική απόκριση* x(t) *του συστήματος θα είναι* :

$$x(t) = x_{\varepsilon\lambda}(t) + x_{\delta\upsilon\nu}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

και η έξοδος y(t) *του συστήματος θα είναι* :

$$y(t) = [\,0\ 1\ 1\,] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{3t} \qquad \square$$

Ενας συνήθης τρόπος που χρησιμοποιείται στην εύρεση της ολικής απόκρισης x(t) *του συστήματος είναι χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς* Laplace :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} sx(s) - x(0-) = A\,x(s) + B\,u(s) \Leftrightarrow$$

$$x(s) = (sI_n - A)^{-1}[\,x(0-) + B\,u(s)] \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0-) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

και η έξοδος θα είναι όπως και παραπάνω. Η *μέθοδος αυτή βάσει των μετασχηματισμών* Laplace *είναι η πιο εύκολη στην λύση προβλημάτων τέτοιου τύπου εφόσον οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί* Laplace *μπορούν να βρεθούν εύκολα.* Ο *λόγος της ευκολίας είναι ότι ανάγουν προβλήματα από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και συνεπώς κάθε πρόβλημα ανάγεται σε ένα απλό αλγεβρικό πρόβλημα.*

Παράδειγμα **18** Να *βρεθεί η ολική απόκριση καθώς και η έξοδος του παρακάτω συστήματος*:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1\ \ 0]\,x(t)$$

δεδομένου ότι $x(0) = [0 \;\; 1]^T$ *και* $u(t)=1$. Εχουμε ότι :

$$x(s) = (sI_n - A)^{-1}[\, x(0) + B\, u(s)] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+(1/s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \frac{s+1}{s}$$

Εχω επίσης ότι :

$$\frac{s+1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+\Gamma}{(s^2+1)} = \frac{(A+B)s^2+(B+\Gamma)s+A}{(s^2+1)} \Longrightarrow A = 1 \,,\, B = 0 \,,\, \Gamma = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{s+1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s^2+1)} \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s(s^2+1)}] = 1 + \sin(t)$$

και :

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2+1}] = \cos(t) + \sin(t)$$

και άρα :

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}$$

και η έξοδος του συστήματος θα είναι :

$$y(t) = [1 \;\; 0]\, x(t) = 1 + \sin(t) \qquad \square$$

Στην άλλη κατηγορία των διακριτών συστημάτων έχουμε για μηδενικές αρχικές συνθήκες :

k=0 $\quad x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$

k=1 $\quad x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0-) + Bu(1)$

... $\quad$ ....

k $\quad \boxed{x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)}$

που θα είναι και η δυναμική απόκριση του συστήματος. Η *ολική απόκριση* $x(k)$ *του συστήματος θα είναι* :

$$\boxed{x(k) = x_{\varepsilon\lambda}(k) + x_{\delta\upsilon\nu}(k) = A^k\ x(0-) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)}$$

ενώ η έξοδος y(k) *του συστήματος θα είναι* :

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \Longrightarrow$$

$$\boxed{y(k) = C\ A^k\ x(0-) + \sum_{i=0}^{k-1} C\ A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k)}$$

Παράδειγμα 19 Να *βρεθεί η* ολική *απόκριση* x(k) *και η έξοδος* y(k) *του συστήματος* :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0\ \ 0\ \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι $[x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^T = [1\ \ 0\ \ 1]^T$ *και* u(k) = 1. Από *το παράδειγμα* 6 *έχουμε ότι* :

$$A^0 = I_3,\ A^1 = A\ \ \textit{και}\ \ A^n = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ n>1$$

και συνεπώς :

$$x_{\varepsilon\lambda}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ \ \textit{και}\ \ x_{\varepsilon\lambda}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\ k>1$$

και

$$x_{\delta\upsilon\nu}(1) = Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{\delta\upsilon\nu}(2) = ABu(0) + Bu(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_{\delta\upsilon\nu}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[\begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}^{k-i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{k-3} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \quad k>2$$

Η *ολική απόκριση* x(k) *του συστήματος θα είναι* :

$$x(1) = x_{\varepsilon\lambda}(1) + x_{\delta\upsilon\nu}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = x_{\varepsilon\lambda}(k) + x_{\delta\upsilon\nu}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k+2 \end{bmatrix}$$

και η έξοδος y(k) *του συστήματος θα είναι* :

$$y(1) = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$y(k) = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k+2 \end{bmatrix} = k+2 \quad k>1$$

□

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκήση 1 Να *βρεθεί η ολική απόκριση* x(t) *καθώς και η έξοδος* y(t) *του παρακάτω συστήματος* :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\,1\ 0\ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι $[x_1(0-), x_2(0-), x_3(0-)]^T = [1\ \ 1\ \ 0]^T$ *και* $u(t) = \alpha+\beta t$ *για* $t \geq 0-$ *με* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 2 Να *βρεθεί η ολική απόκριση* x(k) *καθώς και η έξοδος* y(k) *του παρακάτω συστήματος* :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1\ \ 0\ \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι $[x_1(0-), x_2(0-), x_3(0-)]^T = [1\ \ 1\ \ 0]^T$ *και* $u(k) = \alpha+\beta\kappa$ *με* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Παρατηρείστε *ότι τα συστήματα της άσκησης* 1 *και* 2 *είναι τα ίδια μόνο που το ένα είναι σε συνεχή χρόνο ενώ το δεύτερο σε διακριτό χρόνο*. Τι *συμπεραίνεται από τις λύσεις των δύο συστημάτων.*

Ασκηση 3 *Να βρεθεί η ολική απόκριση* x(t) *καθώς και η έξοδος* y(t) *του παρακάτω συστήματος* :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\,1\ 0\ 0\,] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

δεδομένου ότι $[x_1(0-), x_2(0-), x_3(0-)]^T = [1\ \ -1\ \ 0]^T$ *και* $u(t) = \delta(t)$ *για* $t \geq 0-$.

§6. Ελεγξιμότητα Συνεχών και Διακριτών Γραμμικών Συστημάτων.

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (\Sigma)$$

όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$, $u(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t)\in C_{p}^{i}$, $x(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{p}$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου***.

Ορισμός Το *σύστημα Σ λέγεται* ***πλήρως ελέγξιμο ως προς την κατάσταση*** **x(t)** (completely state controllable) *ή απλώς* ***ελέγξιμο*** (controllable) *εαν και μόνο εαν υπάρχει κάποια τμηματικά συνεχής συνάρτηση εισόδου* u(t) *που θα οδηγήσει το* x(t) *από την αρχική του τιμή* $x(t_0)$ *σε* οποιοδήποτε *χρόνο* t_0 *στην τελική του τιμή* $x(t_f)$ *(αυθαίρετη τελική κατάσταση) σε* οποιοδήποτε *χρόνο* $t_f>t_0\geq 0$. *Διαφορετικά το σύστημα λέγεται* ***μη ελέγξιμο*** (uncotrollable) *παρόλο που είναι πιθανό να είναι "ελέγξιμο κατά ένα μέρος" δηλ. είναι πιθανό να μεταφέρουμε συγκεκριμένες καταστάσεις σε* οποιαδήποτε *επιθυμητή τελική κατάσταση ή την κατάσταση* x(t) *σε συγκεκριμένες περιοχές στον χώρο καταστάσεων.* □

Υπάρχουν εκτός από τον παραπάνω ορισμό *ελεγξιμότητας και άλλοι* ορισμοί *όπως η δυνατότητα μετάβασης από το* 0 *σε* οποιαδήποτε *τελική κατάσταση και* ονομάζεται ***ελεγξιμότητα από το*** **0** (pointwise state controllability from the origin) *ή η δυνατότητα μετάβασης από* οποιαδήποτε *κατάσταση στο* 0 *και* ονομάζεται ***ελεγξιμότητα προς το*** **0** (pointwise state controllability to the origin) *ή η δυνατότητα μετάβασης κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες και κάποια κατάλληλη είσοδο* u(t) *σε* οποιαδήποτε *κατάσταση* x(t) *που ανήκει στον χώρο λύσεων της* ομογενούς $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *και* ονομάζεται ***πεπερασμένη ελεγξιμότητα*** (finite controllable). *Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περίπτωση της ελεγξιμότητας όπως αναφέρεται στον παραπάνω ορισμό.*

Θεώρημα *Οι παρακάτω εκδοχές όσον αφορά το γραμμικό σύστημα* Σ *είναι ισοδύναμες :*

(i) Το *σύστημα είναι ελέγξιμο.*

(ii) Ο *πίνακας :*

$$W(0,T) = \int_0^T e^{-A\tau}BB^{T}e^{-A^{T}\tau}d\tau$$

είναι αντιστρέψιμος.

(iii) *Οι* (n) *γραμμές του πίνακα* $e^{-AT}B$ (*και συνεπώς* $e^{AT}B$) *είναι γραμμικά ανεξάρτητες πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *για κάθε* $T\in[0,+\infty)$.

(iv) Η *τάξη του* (n×nm) *πίνακα ελεγξιμότητας :*

$$\ell := [B, AB, A^2B,\ldots, A^{n-1}B]$$

είναι n ($\rho[\ell]=n$).

Απόδειξη $\boxed{\exists\ u(t)\ :\ x(0) \longrightarrow x(T) \implies \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}W(0,T) = n}$

Εστω *ότι* $\exists$ u(t), $t\in[0,T]$ *τέτοια ώστε να έχουμε την δυνατότητα να μεταβούμε από την κατάσταση* x(0) *στην τελική κατάσταση* x(T). Εχουμε *ότι η ολική απόκριση* x(t) *του συστήματος* Σ *είναι :*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

και συνεπώς για $t_0=0$ *και* $t=T$ *έχουμε ότι :*

$$x(T) = e^{AT}x(0-) + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \implies$$

$$x(T) - e^{AT}x(0-) = \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \overset{\cdot e^{-AT}}{\implies}$$

$$e^{-AT}x(T) - x(0-) = \int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Ας *υποθέσουμε τώρα ότι :*

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}W(0,T) < n \implies \exists\ x\in\mathbb{R}^n\ ,\ x\neq 0 : W(0,T)\cdot x = 0 \implies$$

$$\implies x^{T}W(0,T)x = 0 \implies x^{T}\left[\int_0^T e^{-A\tau}BB^{T}e^{-A^{T}\tau}d\tau\right]x = 0 \implies$$

$$\Longrightarrow \int_0^T (x^T e^{-A\tau}B)(B^T e^{-A^T\tau}x)d\tau = 0 \Longrightarrow \int_0^T \|x^T e^{-A\tau}B\|^2 d\tau = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^T e^{-A\tau}B = 0 \quad \forall\tau\in[0,T] \text{ και } x^T \neq 0 \text{ επειδή } x \neq 0$$

Επειδή τα $x(0)$ και $x(T)$ αυθαίρετα μπορώ να τα διαλέξω έτσι ώστε :

$$e^{-AT}x(T) - x(0-) = x = \int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Εχουμε λοιπόν ότι :

$$x \neq 0 \Longrightarrow x^T x \neq 0 \Longrightarrow x^T \int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \neq 0$$

το οποίο όμως είναι άτοπο λόγω του ότι $x^T e^{-A\tau}B = 0 \ \forall\tau\in[0,T]$ και συνεπώς η υπόθεση μας ότι $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} W(0,T) < n$ είναι λάθος και άρα :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} W(0,T) = n$$

$$\boxed{\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} W(0,T) = n \Longrightarrow \text{οι γραμμές του } e^{-AT}B \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητες}}$$

Εστω ότι οι γραμμές του $e^{-AT}B$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και συνεπώς $\exists\ x\in\mathbb{R}^n$ και $x \neq 0$ τέτοιο ώστε :

$$x\, e^{-AT}B = 0 \Longrightarrow x\left[\int_0^T e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}d\tau\right] = \int_0^T (x\, e^{-A\tau}B)\, B^T e^{-A^T\tau}d\tau = 0$$

που είναι άτοπο διότι $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} W(0,T) = n$. Αρα η υπόθεση μας ότι οι γραμμές του $e^{-AT}B$ είναι γραμμικά εξαρτημένες μας οδήγησε σε άτοπο γεγονός που αποδεικνύει ότι οι γραμμές του $e^{-AT}B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\boxed{\text{οι γραμμές του } e^{-AT}B \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητες} \Longrightarrow \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\ \ell = n}$$

Από το θεώρημα Caley Hamilton έχουμε ότι κάθε πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση δηλ. εαν

$$a(s) := \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

τότε θα έχουμε :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

και συνεπώς :

$$A^{n+1} = -a_{n-1}A^{n} - \cdots - a_1A^2 - a_0A$$
$$A^{n+2} = -a_{n-1}A^{n+1} - \cdots - a_1A^3 - a_0A^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ή πιο γενικά :

$$A^{k} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ik}A^{i} \ \forall\ k \geq n$$

Ετσι ο *πίνακας* e^{-At} *μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τον ορισμό του κεφαλαίου* 2 *ως* :

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ik}A^{i}\Big)\, t^k = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t)\, A^i$$

και άρα :

$$e^{-AT}B = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(T)\, A^iB = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Αμεσο *αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης είναι ότι* :

οι γραμμές του $e^{-AT}B$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητες* $\Longrightarrow \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\, \ell = n$

$$\boxed{\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\ \ell = n \Longrightarrow \exists\ u(t) : x(0) \longrightarrow x(T)}$$

Εχουμε *ότι* :

$$x(T) = e^{AT}x(0-) + \int_0^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Longrightarrow$$
$$x(T) - e^{AT}x(0-) = \int_0^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \overset{\cdot e^{-AT}}{\Longrightarrow}$$
$$e^{-AT}x(T) - x(0-) = \int_0^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Αν *πάρω λοιπόν ως είσοδο την* :

$$u(t) = B^{\top}e^{-A^{\top}t}z$$

έχουμε ότι :

$$e^{-AT}x(T) - x(0-) = \int_0^T e^{-A\tau}BB^{\top}e^{-A^{\top}t}z d\tau \Longrightarrow$$

$$e^{-AT}x(T) - x(0-) = W(0,T)\, z \Longrightarrow$$

$$z = W(0,T)^{-1}\, \{e^{-AT}x(T) - x(0-)\}$$

και συνεπώς με είσοδο :

$$u(t) = B^{\top}\, e^{-A^{\top}t}\, W(0,T)^{-1}\, \{e^{-AT}x(T) - x(0-)\}$$

μπορούμε να μετατοπίσουμε την κατάσταση x(t) *από την αρχική τιμή* x(0–) *στην τελική τιμή* x(T). □

Παράδειγμα 20 Εστω *το σύστημα* Σ :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

Είναι *το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο ;*

Λύσις Εχουμε *ότι :*

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A\,(AB) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Θεωρείστε τον πίνακα ελεγξιμότητας :

$$\ell = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε *ότι* $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\ell = 2 < 3$ *και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.* □

Παράδειγμα 21 *Εστω το σύστημα* Σ :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο ;

Λύσις *Εχουμε ότι :*

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A\ (AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Θεωρείστε τον πίνακα ελεγξιμότητας :

$$\ell = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε ότι $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \ell = 3$ *και συνεπώς το σύστημα είναι ελέγξιμο.* □

Θεώρημα *Ενα γραμμικό σύστημα* Σ *είναι ελέγξιμο εαν και μόνο εαν :*

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}[sI_n - A\ \ B] = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη *Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για όλα τα* s *που δεν είναι ιδιοτιμές του* A *έχουμε* $\det|sI_n - A| \neq 0$ *και συνεπώς* $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}[sI_n - A\ \ B] = n$ *για όλα τα* $s \in \mathbb{C}$ *εκτός από τις ιδιοτιμές του πίνακα* A. *Για τις ιδιοτιμές του πίνακα* A *έχουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση :*

$$\exists\ v \neq 0 : vA = \lambda v \text{ όπου } \lambda \text{ ιδιοτιμή του } A$$

Εχουμε λοιπόν :

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}[\lambda I_n - A\ \ B] = n \quad \forall\ \lambda \in \{\text{ιδιοτιμές του } A\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{δεν υπάρχει } v \neq 0 : v[\lambda I_n - A\ \ B] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{δεν υπάρχει } v \neq 0 : vA = \lambda v \text{ και } vB = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{δεν υπάρχει } v \neq 0 : vAB = \lambda vB = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{δεν υπάρχει } v \neq 0 : vA^2B = vA(AB) = \lambda v(AB) = \lambda\,(vAB) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{δεν υπάρχει } v \neq 0 : vA^{n-1}B = 0$$

Αν συνοψίσουμε τα παραπάνω έχουμε ότι :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[\lambda I_n - A \quad B] = n \quad \forall\ \lambda \in \{\text{ιδιοτιμές του } A\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{δεν υπάρχει } v \neq 0 : v\,[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{το σύστημα } \Sigma \text{ είναι ελέγξιμο}$$

□

Παράδειγμα 22 *Στο παράδειγμα 21 έχουμε ότι :*

$$[sI_n - A \quad B] = \left[\begin{array}{ccc|c} s & -1 & 0 & 1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 1 & -2 & s-3 & 0 \end{array}\right]$$

Εχουμε ότι :

$$a(s) := \det|sI_3 - A| = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & -2 & s-3 \end{bmatrix} = (s-3)(s-1)(s+1)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A *είναι οι* $\{3,1,-1\}$ *και για αυτές έχουμε ότι :*

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[3I_3 - A \quad B] = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] = 3$$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[1I_3 - A \quad B] = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] = 3$$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[-1 \cdot I_3 - A \quad B] = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] = 3$$

και συνεπώς το σύστημα μου είναι ελέγξιμο. □

Ορισμός Το *σύστημα* Σ *λέγεται* ***πλήρως ελέγξιμο ως προς την έξοδο*** **y(t)** (completely output controllable) *εαν και μόνο εαν υπάρχει κάποια τμηματικά συνεχής συνάρτηση εισόδου* u(t) *που θα* οδηγήσει *το* y(t) *από την αρχική του τιμή* $y(t_0)$ *σε* οποιοδήποτε *χρόνο* t_0 *στην τελική του τιμή* $y(t_f)$ *(αυθαίρετη τελική κατάσταση) σε* οποιοδήποτε *χρόνο* $t_f>t_0\geq 0$. *Διαφορετικά το σύστημα λέγεται* ***μη ελέγξιμο*** (uncotrollable) ***ως προς την έξοδο*** **y(t)** *παρόλο που είναι πιθανό να είναι "ελέγξιμο κατά ένα μέρος" δηλ. είναι πιθανό να μεταφέρουμε συγκεκριμένες εξόδους σε* οποιαδήποτε *επιθυμητή τελική έξοδο ή την έξοδο* y(t) *σε συγκεκριμένες περιοχές στον χώρο των εξόδων.* □

Ανάλογοι *ορισμοί αυτών που αναφέραμε προηγουμένως στην ελεγξιμότητα ως προς την κατάσταση* x(t) *μπορούμε να έχουμε και εδώ.*

Θεώρημα Το *σύστημα* Σ *είναι ελέγξιμο ως προς την έξοδο* y(t) *εαν και μόνο εαν* :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[CB, CAB, CA^2B, \cdots, CA^{n-1}B, D] = p$$

Απόδειξη Η *έξοδος του συστήματος* Σ *όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο* 5 *θα είναι* :

$$y(t) = C\, e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\, e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Εχουμε *όμως (δες προηγούμενες αποδείξεις) ότι* :

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k(t-t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ik}A^i\right)(t-t_0)^k = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t-t_0)\, A^i$$

και συνεπώς για t=T *θα έχουμε* :

$$y(T) = C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(T-t_0)\, A^i\right)x(t_0) + \int_{t_0}^{T} C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(T-\tau)\, A^i\right)Bu(\tau)d\tau + Du(T) \Longrightarrow$$

$$\left(y(T) - C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(T-t_0)\, A^i\right)x(t_0)\right) = [CB, CAB, CA^2B, \cdots, CA^{n-1}B, D] \begin{bmatrix} \phi_0(t_0,T) \\ \phi_1(t_0,T) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(t_0,T) \\ u(T) \end{bmatrix}$$

όπου :

$$\phi_i(t_0,T) = \int_{t_0}^{T} \gamma_i(T-\tau)u(\tau)d\tau$$

Για να έχει λύση το παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα πρέπει να έχουμε :

$$\mathrm{Image}[CB,CAB,CA^2B,\cdots,CA^{n-1}B,D] = \mathbb{R}^p \Leftrightarrow$$
$$\dim\{\mathrm{Image}[CB,CAB,CA^2B,\cdots,CA^{n-1}B,D]\} = \dim\mathbb{R}^p \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[CB,CAB,CA^2B,\cdots,CA^{n-1}B,D] = p$$ □

Παράδειγμα 23 *Εστω το σύστημα* Σ :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο ως προς την έξοδο y(t) ;

Λύσις Εχουμε *ότι* :

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CAB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2B = CA\,(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Θεωρείστε την τάξη του πίνακα ελεγξιμότητας ως προς y(t) :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[CB\ CAB\ CA^2B\ D] = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Εχουμε ότι το κριτήριο ελεγξιμότητας ικανοποιείται και συνεπώς το σύστημα είναι ελέγξιμο ως προς την έξοδο y(t). □

Θεωρείστε ένα γραμμικό διακριτό σύστημα που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}, u(k) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *το* ***διάνυσμα εισόδου,*** $x(k) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(k) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου.***

Ορισμός Το *διακριτό σύστημα* Σ *είναι* ***ελέγξιμο ως προς την κατάσταση*** **x(k)** *εαν υπάρχει μια σειρά* u(0), u(1),...,u(N−1) *η* οποία *έχει την δυνατότητα να μεταφέρει το σύστημα από την αρχική κατάσταση* x(0) *σε* οποιαδήποτε *τελική κατάσταση* x(N) *όπου* N>n *ένας πεπερασμένος αριθμός.* □

Θεώρημα Το *διακριτό σύστημα* Σ *είναι ελέγξιμο εαν και μόνο εαν :*

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] = n$$

Απόδειξη *Παρατηρούμε ότι :*

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$
$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) =$$
$$= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

......

$$x(n) = A^nx(0) + A^{n-1}Bu(0) + \cdots + ABu(n-2) + Bu(n-1)$$
$$x(n+1) = A^{n+1}x(0) + A^nBu(0) + \cdots + ABu(n-1) + Bu(n) =$$
$$= A^{n+1}x(0) + (\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{in}A^i)Bu(0) + \cdots + ABu(n-1) + Bu(n) =$$
$$= A^{n+1}x(0) + A^{n-1}B\ (\alpha_{n-1,n}\ u(0)) + A^{n-2}B\ (\alpha_{n-2,n}\ u(0) + u(1))$$
$$+ \cdots + AB(\alpha_{1,n}\ u(1) + u(n-1)) + B\ (\alpha_{0,n}u(0) + u(n))$$

....

$$N>n \qquad x(N) = A^N x(0) + B\,\phi_{0,N} + AB\,\phi_{1,N} + \cdots + A^{n-1}B\,\phi_{n-1,N} =$$

$$= A^N x(0) + [B \; AB \; A^2B \; \cdots \; A^{n-1}B]\begin{bmatrix} \phi_{0,N} \\ \phi_{1,N} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,N} \end{bmatrix}$$

Οπότε *με* $x(0)$ *και* $x(N)$ *γνωστά έχουμε ότι* :

$$x(N) - A^N x(0) = [B \; AB \; A^2B \; \cdots \; A^{n-1}B]\begin{bmatrix} \phi_{0,N} \\ \phi_{1,N} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,N} \end{bmatrix}$$

Το *παραπάνω σύστημα έχει λύση εαν και μόνο εαν* :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B] = n \qquad \square$$

Ορισμός Το *διακριτό σύστημα* Σ *είναι* ***ελέγξιμο ως προς την έξοδο* y(k)** *εαν υπάρχει μια σειρά* $u(0)$, $u(1)$,..,$u(N-1)$ *η* οποία *έχει την δυνατότητα να μεταφέρει το σύστημα από την αρχική κατάσταση* $y(0)$ *σε* οποιαδήποτε *τελική κατάσταση* $y(N)$ *όπου* $N>n$ *ένας πεπερασμένος αριθμός.* □

Θεώρημα Το *διακριτό σύστημα* Σ *είναι ελέγξιμο ως προς την έξοδο* $y(k)$ *εαν και μόνο εαν*

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[CB,CAB,CA^2B,\cdots,CA^{n-1}B,D] = p$$

Απόδειξη Εχουμε *από το κεφάλαιο* 5 *ότι* :

$$y(N) = C\,A^N\,x(0-) + \sum_{i=0}^{N-1} C\,A^{N-i-1}Bu(i) + Du(N) \Leftrightarrow$$

$$y(N) - C\,A^N\,x(0-) = [D,CB,CAB,CA^2B,\cdots,CA^{n-1}B]\begin{bmatrix} u(N) \\ \phi_{0,N} \\ \phi_{1,N} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,N} \end{bmatrix}$$

όπου τα $\phi_{i,N}$ *έχουν* ορισ*τεί στο προηγούμενο θεώρημα, η* οποία *έχει λύση εαν και μόνο εαν* :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}[CB,CAB,CA^2B,\cdots,CA^{n-1}B,D] = p \qquad \square$$

§7. Παρατηρησιμότητα Συνεχών και Διακριτών Γραμμικών Συστημάτων.

Θεωρείστε ένα συνεχές γραμμικό σύστημα Σ που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (\Sigma)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $u(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ το ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t) \in C_p^i$, $x(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι το ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** και $y(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p$ είναι το ***διάνυσμα εξόδου***.

Ορισμός Το γραμμικό σύστημα Σ λέγεται ***πλήρες παρατηρήσιμο ως προς την είσοδο*** **x(t)** (completely state observable) ή απλά ***παρατηρήσιμο*** (observable) εαν και μόνο εαν η ψευδοκατάσταση $x(t)$ του Σ μπορεί να υπολογισθεί στο διάστημα $[t_0,t_1]$ όταν ξέρουμε την είσοδο $u(t)$ και την έξοδο $y(t)$ στο διάστημα $[t_0,t_1]$ όπου $t_1 > t_0 > 0$. Διαφορετικά το σύστημα λέγεται ***μη παρατηρήσιμο*** παρόλο που μπορεί να είναι "παρατηρήσιμο κατά ένα μέρος του" δηλ. είναι δυνατό να παρατηρήσουμε ένα μέρος του όλου διανύσματος κατάστασης $x(t)$. □

Θεώρημα Οι επόμενες παραδοχές όσον αφορά το συνεχές γραμμικό σύστημα Σ είναι ισοδύναμες :

(i) Το σύστημα Σ είναι παρατηρήσιμο.

(ii) Ο πίνακας :

$$V(0,T) = \int_0^T e^{A^\top\tau} C^\top C e^{A\tau} d\tau$$

είναι αντιστρέψιμος.

(iii) Οι (n) στήλες του πίνακα Ce^{At} είναι γραμμικά ανεξάρτητες $\forall t \in [0,+\infty)$ πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$.

(iv) Η *τάξη του* (np)×n *πίνακα* :

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

είναι n ($\rho[\mathcal{Q}]$=n).

Απόδειξη $\boxed{\Sigma \text{ παρατηρήσιμο} \Leftrightarrow \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) = n}$

Εχουμε *από το κεφάλαιο* 5 *ότι* :

$$y(t) = C\,e^{At}x(0) + \int_0^t C\,e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(t) - \int_0^t C\,e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t) = f(t) = C\,e^{At}x(0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (Ce^{At})^{\mathsf{T}}f(t) = (Ce^{At})^{\mathsf{T}}C\,e^{At}x(0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_0^T (Ce^{At})^{\mathsf{T}}f(t)dt = \int_0^T (Ce^{At})^{\mathsf{T}}C\,e^{At}x(0)dt = V(0,T)\;x(0\pm)$$

Αρα *μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο είναι* :

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) = n$$

και στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών x(0−) *θα δίνεται από τον τύπο* :

$$x(0-) = V(0,T)^{-1}\int_0^T (Ce^{At})^{\mathsf{T}}f(t)dt$$

και η κατάσταση x(t) *θα δίνεται από τον τύπο* :

$$x(t) = e^{At}\left[V(0,T)^{-1}\int_0^T (Ce^{At})^{\mathsf{T}}f(t)dt\right] + \int_0^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\boxed{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) = n \Leftrightarrow \text{οι στήλες του } Ce^{At} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητες}}$$

(⟹) Εστω *ότι* :

οι στήλες του Ce^{At} *είναι γραμμικά ανεξάρτητες* $\Longrightarrow \exists\; x\neq 0 : Ce^{At}x = 0 \;\; \forall t\in[0,+\infty)$

τότε θα έχουμε :

$$V(0,T) = \int_0^T e^{A^\top \tau} C^\top C e^{A\tau} d\tau \Longrightarrow V(0,T)x = \int_0^T e^{A^\top \tau} C^\top (C e^{A\tau} x) d\tau = 0$$

και άρα $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) < n$ *που είναι άτοπο και άρα η υπόθεση μας ότι οι στήλες του* Ce^{At} *είναι γραμμικά εξαρτημένες μας οδήγησε σε άτοπο γεγονός που αποδεικνύει ότι οι στήλες του* Ce^{At} *είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

$(\Longleftarrow)$ Εστω *ότι* :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) < n \qquad \Longrightarrow \exists\ x \neq 0 : V(0,T)x = 0 \Longrightarrow x^\top V(0,T) x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^\top \left[\int_0^T e^{A^\top \tau} C^\top C e^{A\tau} d\tau \right] x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_0^T (Ce^{A\tau}x)^\top (Ce^{A\tau}x) d\tau = 0 \Longrightarrow \int_0^T \|Ce^{A\tau}x\|^2 d\tau = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ce^{A\tau}x = 0 \quad \forall \tau \in [0,T]$$

και συνεπώς οι στήλες του Ce^{At} *είναι γραμμικά εξαρτημένες που είναι άτοπο άρα η υπόθεση μας ότι* $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) < n$ *είναι λάθος και άρα* :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} V(0,T) = n$$

$$\boxed{\text{οι στήλες του } Ce^{At} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητες} \Leftrightarrow \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} \mathcal{Q} = n}$$

Εχουμε *ότι* :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ik} A^i \right) t^k = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t) A^i \Longrightarrow$$

$$Ce^{At} = [\gamma_0(t) I_p \ \gamma_1(t) I_p \ \cdots \ \gamma_{n-1}(t) I_p] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

και συνεπώς έχω ότι η τάξη του $\mathcal{Q}$ *είναι* n *εαν και μόνο εαν οι στήλες του* Ce^{At} *είναι γραμμικά ανεξάρτητες.* □

Παράδειγμα 25 *Εστω το σύστημα* Σ :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\ 0 \ \ 1 \ \ 0\ ]\, x(t)$$

Είναι το παραπάνω σύστημα παρατηρήσιμο ;

Λύσις *Εχουμε ότι :*

$$CA = [\ 0 \ \ 1 \ \ 0\ ] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [1 \ \ 0 \ \ 0]$$

$$CA^2 = (CA)\, A = [1 \ \ 0 \ \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [\ 0 \ \ 1 \ \ 0]$$

Αρα έχουμε ότι ο πίνακας παρατηρησιμότητας του συστήματος είναι :

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q} = 2 < 3$ *που σημαίνει ότι το σύστημα μου είναι μη παρατηρήσιμο. Εαν θέσουμε τον μετασχηματισμό :*

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} z(t) = Uz(t)$$

όπου οι στήλες του U *αποτελούνται από τα ιδιοανύσματα του* A *έχουμε ότι :*

$$(Uz(t))^{(1)} = A(Uz(t)) + Bu(t)$$

$$y(t) = C(Uz(t))$$

ή ισοδύναμα :

$$\dot{z}(t) = (VAU)\, z(t) + (VB)\, u(t)$$
$$y(t) = (CU)\, z(t) \quad (V=U^{-1})$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [2 \;\; -4 \;\; 0]\, z(t) \quad \textit{όπου}\; z(t) = [z_1(t), z_2(t), z_3(t)]^T$$

Από το παραπάνω σύστημα φαίνεται ότι η έξοδος $y(t)$ *δεν επηρεάζεται καθόλου από την κατάσταση* $z_3(t)$ *και συνεπώς η κατάσταση* $z_3(t)$ *δεν μπορεί να προσδιορισθεί*, οπότε το *ισοδύναμο σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο.* □

Θεώρημα Το *συνεχές γραμμικό σύστημα* Σ *είναι παρατηρήσιμο εαν και μόνο εαν*

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall\, s \in \mathbb{C}$$

Απόδειξη *Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για όλα τα* s *που δεν είναι ιδιοτιμές του* A *έχουμε* $\det|sI_n - A| \neq 0$ *και συνεπώς* $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}[sI_n - A^T \; C^T]^T = n$ *για όλα τα* $s \in \mathbb{C}$ *εκτός από τις ιδιοτιμές του πίνακα* A. *Για τις ιδιοτιμές του πίνακα* A *έχουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση* :

$$\exists\, u \neq 0 : \; Au = \lambda u \; \textit{όπου}\; \lambda \; \textit{ιδιοτιμή του}\; A$$

Εχουμε *λοιπόν* :

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}[\lambda I_n - A^T \; C^T]^T = n \quad \forall\, \lambda \in \{\textit{ιδιοτιμές του } A\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textit{δεν υπάρχει } u \neq 0 : \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} u = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textit{δεν υπάρχει } u \neq 0 : Au = \lambda u \textit{ και } Cu = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textit{δεν υπάρχει } u \neq 0 : CAu = C\lambda u = \lambda Cu = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textit{δεν υπάρχει } u \neq 0 : CA^2 u = CA(Au) = CA(\lambda u) = \lambda (CAu) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textit{δεν υπάρχει } u \neq 0 : CA^{n-1}u = 0$$

Αν συνοψίσουμε τα παραπάνω έχουμε ότι :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall\ \lambda \epsilon \{\text{ιδιοτιμές του A}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ δεν υπάρχει } u \neq 0 : \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ το σύστημα } \Sigma \text{ είναι παρατηρήσιμο} \qquad \square$$

Παράδειγμα 26 Εστω το σύστημα Σ :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Είναι το παραπάνω σύστημα παρατηρήσιμο ;

Λύσις Εχουμε από παράδειγμα 22 ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές τις {–1,1,3} και συνεπώς :

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 1I_3 - A \\ C \end{bmatrix} = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} -1I_3 - A \\ C \end{bmatrix} = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 3I_3-A \\ C \end{bmatrix} = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

και συνεπώς το σύστημα Σ είναι παρατηρήσιμο. □

Θεωρείστε ένα γραμμικό διακριτό σύστημα που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$, $u(k) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $x(k) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(k) : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου***.

Ορισμός Το *διακριτό σύστημα* Σ *είναι* ***παρατηρήσιμο*** (observable) *εαν η αρχική κατάσταση* $x(0)$ (*για κάθε* $x(0)$) (*ή γενικά η κατάσταση* $x(k)=A^k x(0-)$) *μπορεί να υπολογισθεί βάσει των* N *μετρήσεων* $y(0),y(1),\ldots,y(N-1)$ *και* $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(n)$ *με* $N\geq n$ *πεπερασμένο.* □

Θεώρημα Το *διακριτό σύστημα* Σ *είναι παρατηρήσιμο* (observable) *εαν και μόνο εαν :*

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Απόδειξη Για *να απλοποιήσουμε την απόδειξη υποθέτουμε ότι* $u(k) = 0$ $\forall k\in\mathbb{N}$ *και συνεπώς έχουμε :*

$$y(k) = C\,(A^k x(0))$$

$$y(k+1) = CA^{k+1}x(0) = CA\,(A^k x(0))$$

$$\cdots\cdots$$

$$y(k+n-1) = CA^{k+n-1}x(0) = CA^{n-1}\,(A^k x(0))$$

ή ισοδύναμα :

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} (A^k x(0))$$

και συνεπώς το παραπάνω σύστημα έχει λύση ως προς $(A^k x(0) \equiv x(k))$ *εαν και μόνο εαν :*

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \qquad \square$$

Παράδειγμα 27 *Εστω το παρακάτω διακριτό σύστημα :*

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \;\; 0 \;\; 1]\, x(k)$$

Να *εξετασθεί ως προς την παρατηρησιμότητα το σύστημα* Σ.

Λύσις Ε*χουμε ότι :*

$$CA = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \;\; 2 \;\; 1]$$

$$CA^2 = (CA)\,A = [-1 \;\; 2 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \;\; 3 \;\; 3]$$

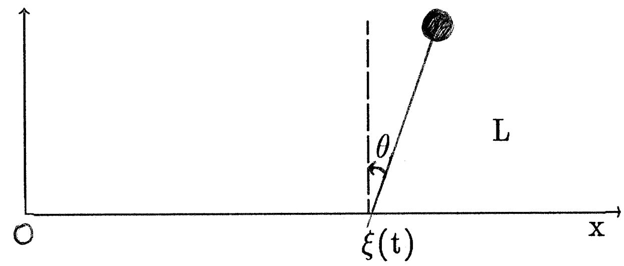
Ο *πίνακας παρατηρησιμότητας του συστήματος θα είναι :*

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ε*χουμε* $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}=3$ *και συνεπώς το σύστημα μου θα είναι παρατηρήσιμο.* $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1 *Θεωρείστε την παρακάτω ράβδο μήκους* L, *της οποίας η κορυφή βρίσκεται στην άκρη του δακτύλου σας και την οποία προσπαθείται να ισορροπήσετε με κινήσεις προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση του άξονα* x.



Οι εξισώσεις του παραπάνω γραμμικοποιημένου δυναμικου συστήματος για μικρή γωνία θ είναι :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \;\; 0] x(t)$$

όπου $u(t) = \dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$ *και* $x(t)^T = [x_1(t),\ x_2(t)]^T = [\theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]$. *Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο ως προς την είσοδο* x(t), *ελέγξιμο ως προς την έξοδο, παρατηρήσιμο;*

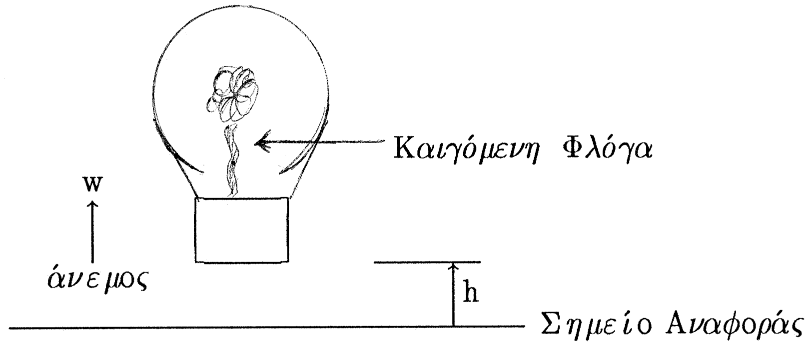
Ασκηση 2 *Οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση ενός αερόστατου είναι :*

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{\tau_1}\theta(t) + u(t)$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{1}{\tau_2}v(t) + \sigma\,\theta(t) + \frac{1}{\tau_2}w(t)$$

$$\dot{h}(t) = v(t)$$

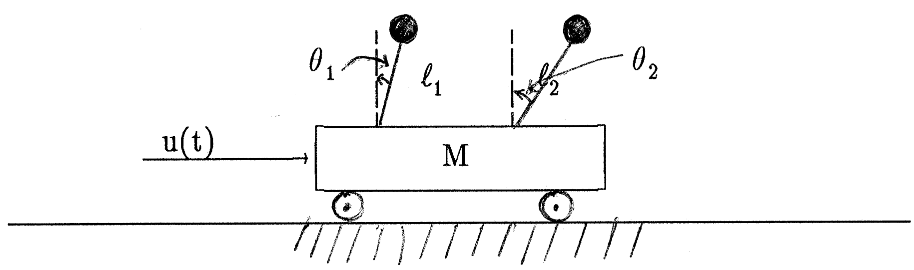
όπου $\theta(t)$ = *η θερμοκρασία μέσα στο μπαλλόνι του αερόστατου,* $u(t)$ *είναι ανάλογο της αλλαγής στην θερμοκρασία που προστίθεται στο μπαλλόνι (έλεγχος),* $v(t)$ = *η κάθετη ταχύτητα,* $h(t)$ = *το ύψος από σταθερό σημείο αναφοράς και* $w(t)$ = *η κάθετη ταχύτητα του ανέμου.*



α) Μπορεί *η αλλαγή της θερμοκρασίας* $\theta(t)$ *και ένας σταθερός άνεμος* ($\dot{w}(t)$) *να παρατηρηθούν με μια συνεχή μέτρηση της αλλαγής στο ύψος* $h(t)$; (Υποθέστε *ότι η* $u(t)$ *είναι γνωστή*)

β) Είναι *το σύστημα πλήρως ελέγξιμο από την* $u(t)$; Είναι *το σύστημα πλήρως ελέγξιμο από την* $w(t)$;

Ασκηση 3 Θεωρείστε *το παρακάτω δυναμικό σύστημα* :



το οποίο περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :

$$M\dot{v}(t) = -\,mg\theta_1(t) - mg\theta_2(t) + u(t)$$

$$m(\dot{v}(t) + \ddot{\theta}_i(t)) = mg\theta_i(t) \quad i=1,2$$

όπου v(t) *είναι η ταχύτητα του σώματος και* u(t) *είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σώμα.* Εαν *θέσουμε*

$$x_1(t) = \theta_1(t) \quad x_2(t) = \theta_2(t) \quad x_3(t) = \dot{\theta}_1(t) \quad x_4(t) = \dot{\theta}_2(t)$$

το σύστημα μου παίρνει την εξής μορφή :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/(M\ell_1) \\ -1/(M\ell_2) \end{bmatrix} u(t)$$

όπου :

$$\alpha_1 = \frac{(M+m)g}{M\ell_1} \qquad \alpha_2 = \frac{mg}{M\ell_1}$$

$$\alpha_3 = \frac{mg}{M\ell_2} \qquad \alpha_4 = \frac{(M+m)g}{M\ell_2}$$

Είναι *το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο ;*

Ασκηση 4 Εστω *η περιγραφή ενός συστήματος* Σ *στον χώρο των καταστάσεων είναι ο παρακάτω :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 1 \;\; 0]\, x(t)$$

α) Είναι *το παραπάνω σύστημα παρατηρήσιμο ;*

β) Εστω *ότι εφαρμόζω μια ανάδραση καταστάσεως στο σύστημα* Σ *της μορφής :*

$$u(t) = -[1 \; K_1 \; K_2]\, x(t) + v(t)$$

Να *εξετάσετε ως προς την παρατηρησιμότητα το κλειστό σύστημα.*

γ) Να *ελέγξετε ως προς την ελεγξιμότητα το ανοικτό και το κλειστό σύστημα.*

δ) Βάσει των ερωτημάτων (α),(β) και (γ) να διατυπώσετε ποια από τις παρακάτω διατυπώσεις είναι σωστή :

(i) Η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα ενός συστήματος παραμένει αμετάβλητη κάτω από ανάδραση καταστάσεως.

(ii) Η ελεγξιμότητα ενός συστήματος παραμένει αμετάβλητη σε αντίθεση με την παρατηρησιμότητα κάτω από ανάδραση καταστάσεως.

(iii) Η παρατηρησιμότητα ενός συστήματος παραμένει αμετάβλητη σε αντίθεση με την ελεγξιμότητα κάτω από ανάδραση καταστάσεως.

(iv) Η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα ενός συστήματος μεταβάλλονται κάτω από ανάδραση καταστάσεως.

§8. Ευστάθεια συνεχών και διακριτών γραμμικών συστημάτων.

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ *που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (\Sigma)$$

όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$, $u(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t)\in C_p^i$, $x(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου***.

Ορισμός *Ονομάζουμε* ***συνάρτηση μεταφοράς*** *του παραπάνω συστήματος* Σ *την παράσταση :*

$$G(s) := C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

Ο *αντίστροφος μετασχηματισμός* Laplace *της* G(s) *ονομάζεται* ***κρουστική απόκριση*** *και είναι ο πίνακας :*

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \qquad \square$$

Παράδειγμα 28 *Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του παρακάτω συστήματος :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Λύσις Η *συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος θα είναι :*

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-3)(s^2-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ s-3 & x_3 & x_6 \\ 2-s & x_4 & x_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-3)(s^2-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s-3 \\ 2-s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s^2-1)} + 1 \\ \frac{2-s}{(s-3)(s^2-1)} \end{bmatrix}$$

ενώ η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι :

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s^2-1)} + 1 \\ \frac{2-s}{(s-3)(s^2-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \delta(t) \\ -\frac{1}{8} e^{3t} - \frac{1}{4} e^{t} + \frac{3}{8} e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \square$$

Ενώ *οι εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων περιγράφουν την συμπεριφορά του συστήματος στο* ***πεδίο του χρόνου*** *και είναι* ***εσωτερική περιγραφή****.* Η *συνάρτηση μεταφοράς το περιγράφει στο* ***πεδίο των συχνοτήτων*** *και είναι* ***εξωτερική περιγραφή****.*

Ορισμός Το *παραπάνω σύστημα* Σ *ονομάζεται* ***εξωτερικά ευσταθή*** (externally stable) *εαν μια φραγμένη είσοδος,* $u(t) < M_1$, $-\infty < -T \leq t < \infty$, *παράγει μια φραγμένη έξοδο,* $y(t) < M_2$, $-\infty < -T \leq t < \infty$. □

Θεώρημα Μ*ια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το* Σ *εξωτερικά ευσταθή είναι η εξής :*

$$\int_0^{+\infty} |G(t)|\,dt < M < \infty$$

Απόδειξη Η *παρακάτω απόδειξη αφορά συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου, παρ'όλα αυτά παρόμοιες αποδείξεις μπορούν να επιτευχτούν για συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.* Μ*πορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι οι αρχικές μας συνθήκες είναι* *μηδενικές και συνεπώς :*

$$y(t) = \int_0^{+\infty} G(t)u(t-\tau)dt$$

οπότε κάτω από τις υποθέσεις ότι η u(t) *και η* y(t) *είναι φραγμένες έχουμε ότι :*

$$|y(t)| \leq \int_0^{+\infty} |G(t)|\,|u(t-\tau)|\,dt \leq M_1 \int_0^{+\infty} |G(t)|\,dt < M_2 < \infty$$

Για να δείξουμε το αντίστροφο ας υποθέσουμε ότι :

$$\int_0^{+\infty} |G(t)|\,dt = \infty$$

αλλά ότι φραγμένες είσοδοι μας δίνουν φραγμένες εξόδους. Θεωρείστε ως είσοδο την :

$$u(t_1 - \cdot) = \mathrm{sgn}G(\cdot) := \begin{cases} +1 & \varepsilon\alpha\nu\ \ G(\cdot) > 0 \\ 0 & \varepsilon\alpha\nu\ \ G(\cdot) = 0 \\ -1 & \varepsilon\alpha\nu\ \ G(\cdot) < 0 \end{cases}$$

όπου t_1 *είναι κάποιος σταθερός χρόνος.* Τότε

$$y(t_1) = \int_0^{+\infty} G(t)u(t_1-t)dt = \int_0^{+\infty} |G(t)|\,dt = \infty$$

και έτσι η έξοδος δεν θα είναι φραγμένη και συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο. Αρα *αποδείξαμε και το αντίστροφο.* □

Ορισμός *Θα λέμε ότι ένα συνεχές γραμμικό σύστημα* Σ *είναι* ***εσωτερικά ευσταθές*** (internally stable) *ή* ***ευσταθές*** (stable) ***κατά τον ορισμό του*** **Lyaqunov** *εαν η λύση της* ομογενούς :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \geq t_0$$

τείνει στο μηδέν καθώς $t \longrightarrow \infty$ *για αυθαίρετα* x_0. □

Θεώρημα *Ενα συνεχές γραμμικό σύστημα* Σ *είναι εσωτερικά ευσταθές εαν και μόνο εαν :*

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(A))<0$$

όπου $\lambda_i(A)$ *είναι οι ιδιοτιμές του* A.

Απόδειξη Η *λύση της ομογενούς είναι της μορφής :*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) = U\, e^{J(t-t_0)}\, V\, x(t_0)$$

όπου

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_k t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad e^{J_i t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu_i - 2}}{(\mu_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

και συνεπώς είναι ευκολονόητο ότι για $\lambda_i<0$ *έχω* $\lim_{t\to\infty} t^k e^{\lambda_i t} = 0$ *και πιο γενικά* :

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = U\, 0\, e^{-Jt_0}\, V\, x(t_0) = 0. \qquad \square$$

Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι εαν ένα σύστημα είναι εσωτερικά ευσταθές τότε είναι και εξωτερικά ευσταθές αλλά δεν συμβαίνει απαραίτητα και το αντίστροφο. Π*ιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα* :

Θεώρημα Ο *ορισμός της εξωτερικής ευστάθειας είναι ισοδύναμος με τον* ο*ρισμό της εσωτερικής ευστάθειας εαν το σύστημα μου* Σ *είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο* (*ή αλλιώς ελάχιστο* (minimal)).

Απόδειξη Η *απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι πάντα υπάρχει ένας πίνακας* U (Kailath) *τέτοιος ώστε εαν πάρουμε τον μετασχηματισμό* :

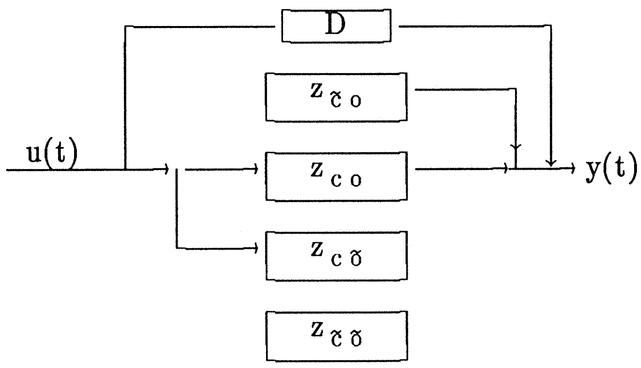
$$x(t) = U\, z(t)$$

θα πάρουμε ένα σύστημα της μορφής :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} A_{co} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{c\bar{o}} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} b_{co} \\ b_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{όπου } z(t) = \begin{bmatrix} z_{co}(t) \\ z_{c\bar{o}}(t) \\ z_{\bar{c}o}(t) \\ z_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [c_{co} \;\; 0 \;\; c_{\bar{c}o} \;\; 0]\, z(t) + Du(t)$$

όπου A_{co}, $A_{\bar{c}o}$, $A_{c\bar{o}}$, $A_{\bar{c}\bar{o}}$, *είναι αντίστοιχα το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο μέρος του πίνακα, το μη ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, το ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο και τέλος το μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο ή κάπως εικονικά :*



Η *συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος θα είναι :*

$$G(s) = c_{co}(sI-A_{co})^{-1}b_{co}$$

και συνεπώς η εξωτερική ευστάθεια του συστήματος μας δίνει ότι οι ιδιοτιμές του ελέγξιμου και παρατηρήσιμου μέρους του συστήματος θα είναι αρνητικές. Παρ'όλα *αυτά μπορεί να υπάρχουν ιδιοτιμές του μη ελέγξιμου ή μη παρατηρήσιμου μέρους που να είναι θετικές και συνεπώς το σύστημα μου να μην είναι εσωτερικά ευσταθές.* Αρα *μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ισοδύναμη η εσωτερική με την εξωτερική ευστάθεια είναι το σύστημα να είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο* ($A = A_{co}$). □

Παράδειγμα 29 Εστω *το παρακάτω σύστημα :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1]\, x(t)$$

Είναι *το παραπάνω σύστημα εξωτερικά, εσωτερικά ευσταθές ;*

Λύσις Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι στην διαγωνοποιημένη μορφή και συνεπώς οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι οι $\{1, -1\}$ και άρα το σύστημα είναι εσωτερικά ασταθές διότι μια από τις ιδιοτιμές του συστήματος είναι αρνητική.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θα είναι :

$$G(s) = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \ \ 1]\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow$$

$$G(t) = e^{-t}$$

και συνεπώς :

$$\int_0^{+\infty} |e^{-t}|\,dt \overset{e^{-t}>0}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 0 - [-1] = 1$$

Αρα το σύστημα μου είναι εξωτερικά ευσταθές. Βλέπουμε λοιπόν ότι η εξωτερική ευστάθεια δεν συνεπάγεται πάντα την εσωτερική ευστάθεια. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι γιατί το σύστημα μου δεν είναι ελέγξιμο και η ιδιοτιμή του μη ελέγξιμου τμήματος (η ιδιοτιμή που χάνει την πλήρη του τάξη ο πίνακας $[sI_n-A \quad B]$) είναι θετική. Ενα ακόμα συμπέρασμα είναι αυτό που αναφέραμε και προηγουμένως ότι ενώ η συνάρτηση μεταφοράς μας δίνει την εξωτερική περιγραφή του συστήματος ο χώρος καταστάσεων μας δίνει την εσωτερική περιγραφή του συστήματος και συνεπώς εαν το σύστημα μου έδειχνε εξωτερικά να μην υφίσταται κανένα πρόβλημα ουσιαστικά είχε ένα εσωτερικό πρόβλημα αστάθειας κάτι που δεν είχαν επινοήσει στην Κλασσική Θεωρία Ελέγχου (δες Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων 1). □

Δεν θα επιμείνουμε περισσότερο στην ευστάθεια συνεχών γραμμικών συστημάτων αναφέροντας τα θεωρήματα Kalman και Lyaqunov. Μια εκτενέστερη μελέτη αυτών μπορεί να γίνει από την αντίστοιχη βιβλιογραφία που παραθέτουμε στο τέλος. Θα αναφέρουμε απλώς περιληπτικά την ευστάθεια στα διακριτά συστήματα.

Θεωρείστε ένα γραμμικό διακριτό σύστημα που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $u(k) : \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ *το* ***διάνυσμα εισόδου,*** $x(k) : \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(k) : \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{p}$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου.***

Ορισμός *Ονομάζουμε* ***συνάρτηση μεταφοράς*** *του παραπάνω συστήματος* Σ *την παράσταση :*

$$G(s) := C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

Ο *πίνακας :*

$$G(k) = \begin{cases} CA^{k-1}B + D & k \geq 1 \\ D & k=1 \end{cases}$$

ονομάζεται ***κρουστική απόκριση.*** □

Η *συνάρτηση μεταφοράς και εδώ μας δίνει μια εξωτερική περιγραφή του συστήματος σε αντίθεση με τον χώρο των καταστάσεων που μας δίνει μια εσωτερική περιγραφή.*

Ορισμός Το *παραπάνω διακριτό σύστημα* Σ *ονομάζεται* ***εξωτερικά ευσταθή*** (externally stable) *εαν μια φραγμένη είσοδος,* $u(k) < M_1$, *παράγει μια φραγμένη έξοδο,* $y(k) < M_2$. □

Θεώρημα *Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το διακριτό σύστημα* Σ *εξωτερικά ευσταθή είναι η εξής :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} G(k) < M < \infty$$

Απόδειξη Η *παρακάτω απόδειξη αφορά συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου, παρ'όλα αυτά παρόμοιες αποδείξεις μπορούν να επιτευχτούν για συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων. Μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι οι αρχικές μας συνθήκες είναι μηδενικές και συνεπώς :*

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1}Bu(i) + Du(i) = \sum_{i=0}^{k} G(k-i)\, u(i)$$

οπότε κάτω από τις υποθέσεις ότι η u(k) *και η* y(k) *είναι φραγμένες έχουμε ότι :*

$$|y(k)| \leq \sum_{i=0}^{k} |G(k-i)\, u(i)| \leq M_1 \sum_{i=0}^{k} |G(k-i)| < M_2 < \infty$$

Για να δείξουμε το αντίστροφο ας υποθέσουμε ότι :

$$\sum_{i=0}^{\infty} G(k) = \infty$$

αλλά ότι φραγμένες είσοδοι μας δίνουν φραγμένες εξόδους. Θεωρείστε ως είσοδο την :

$$u(i_1) = \mathrm{sgn}G(k-i_1) := \begin{cases} +1 & \text{εαν } G(k-i_1) > 0 \\ 0 & \text{εαν } G(k-i_1) = 0 \\ -1 & \text{εαν } G(k-i_1) < 0 \end{cases}$$

όπου i_1 *είναι κάποιος σταθερός χρόνος. Τότε*

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} G(k-i)\, u(i) = \sum_{i=0}^{k} |G(k-i)| \Longrightarrow$$

$$y(\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} |G(k-i)| = \infty$$

και έτσι η έξοδος δεν θα είναι φραγμένη και συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο. Αρα αποδείξαμε και το αντίστροφο. □

Ορισμός *Θα λέμε ότι ένα διακριτό γραμμικό σύστημα* Σ *είναι* ***εσωτερικά ευσταθές*** (internally stable) *εαν η λύση της ομογενούς :*

$$x(k+1) = Ax(k) \qquad x(0) = x_0$$

τείνει στο μηδέν καθώς $k \longrightarrow \infty$ *για αυθαίρετα* x_0. □

Θεώρημα *Ενα συνεχές γραμμικό σύστημα* Σ *είναι εσωτερικά ευσταθές εαν και μόνο εαν :*

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 1$$

όπου $\lambda_i(A)$ *είναι οι ιδιοτιμές του* A.

Απόδειξη Η *λύση της ομογενούς είναι της μορφής :*

$$x(n) = A^n\, x(0) = U\, J^n\, V\, x(0)$$

όπου

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k^n \end{bmatrix}$$

και

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{k-1}\lambda_i^{n-k+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{k-2}\lambda_i^{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{bmatrix} \qquad i=1,2,..,k$$

Αρα καθώς $n \to \infty$ *θα έχω για* $\lambda_i(A)<1$ *ότι* $\lim_{n \to \infty} \binom{n}{i-1} \lambda_i^{n-i+1} = 0$ *και συνεπώς* :

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{n \to \infty} U\, J^n\, V\, x(0) = U\, 0\, V\, x(0) = 0 \qquad \square$$

Παρόμοια αποτελέσματα όσον αφορά την σχέση εσωτερικής και εξωτερικής ευστάθειας έχουμε και στα διακριτά συστήματα. Πιο συγκεκριμένα :

Θεώρημα *Ο ορισμός της εξωτερικής ευστάθειας είναι ισοδύναμος με τον ορισμό της εσωτερικής ευστάθειας εαν το διακριτό σύστημα μου Σ είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο (ή αλλιώς ελάχιστο* (minimal)). $\square$

***Παράδειγμα* 30** *Δίνεται το παρακάτω διακριτό σύστημα Σ* :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

α) *Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς καθώς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.*

β) *Να εξεταστεί ως προς την εσωτερική και εξωτερική ευστάθεια το σύστημα Σ.*

Λύσις

α) Η *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι* :

$$G(z) = [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ -1 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_4 & \chi_7 \\ \chi_2 & \chi_5 & \chi_8 \\ \chi_3 & \chi_6 & 1/(z-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1}$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι :

$$G(k) = CA^{k-1}B = [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \textit{για}\ k>2$$

$$G(2) = [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$G(1) = [0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

άρα και γενικά $G(k) = 1$.

β) *Οι ιδιοτιμές του συτήματος είναι* $\{0,0,1\}$ *και συνεπώς το σύστημα μου είναι εσωτερικά ασταθές εφόσον η ιδιοτιμή 1 δεν ικανοποιεί την συνθήκη* $\lambda_i(A)<1$. Η *ελεύθερη απόκριση του συστήματος θα είναι* :

$$x(k) = A^k x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1(0) + x_3(0) \end{bmatrix} \quad \textit{για}\ k\geq 2$$

και

$$x(1) = Ax(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1(0) \\ x_1(0) + x_3(0) \end{bmatrix}$$

που είναι φραγμένη, έχουμε δηλαδή ένα είδος ευστάθειας σε κύκλο.

Εχουμε *επίσης ότι* :

$$\sum_{i=0}^{\infty} G(i) = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty$$

και συνεπώς το σύστημα μου δεν είναι εξωτερικά ευσταθές. □

§9. Ανάδραση καταστάσεως συνεχών και διακριτών γραμμικών συστημάτων.

Πρόβλημα (Pole shifting problem) *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (\Sigma)$$

όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$, $u(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t)\in C_p^i$, $x(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{n}$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(t) : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{p}$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου***. *Εστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα* A *είναι :*

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Να *βρεθεί ένας πίνακας* $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$ *τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω την* ***ανάδραση καταστάσεως*** :

$$u(t) = v(t) - K\,x(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο το :

$$\hat{a}(s) = s^n + \hat{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0 \qquad \square$$

Προτού *αναφερθούμε στην λύση του παραπάνω προβλήματος θα θέλαμε να αναφέρουμε ότι η χρησιμοποίηση ανάδρασης καταστάσεως*

$$u(t) = v(t) - K\,x(t)$$

σε γραμμικά συστήματα έπαιξε μεγάλο ρόλο στην σχεδίαση συστημάτων με προκαθορισμένες ιδιότητες π.χ. έλεγχο ιδοτιμών, τέλεια προσαρμογή προς πρότυπο, αποσύζευξη εισόδων–εξόδων κ.λ.π.

Επειδή *σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να εισαγάγει τον φοιτητή στην έννοια των προβλημάτων της μοντέρνας θεωρίας ελέγχου γι'αυτό θα μελετήσουμε το πρόβλημα της προσαρμογής των ιδιοτιμών ενός συστήματος για την περίπτωση μιας εισόδου μιας εξόδου* $B\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $C\in\mathbb{R}^{1\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ *και θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα ενός πολυμεταβλητού συστήματος.*

Θεωρείστε *το πρόβλημα που αναφέραμε παραπάνω.* Επειτα *από την ανατροφοδότηση καταστάσεως του συστήματος το καινούργιο σύστημα θα έχει την παρακάτω μορφή :*

$$\dot{x}(t) = (A-BK)x(t) + Bv(t)$$
$$y(t) = (C-DK)x(t) + Dv(t)$$

Το *χαρακτηριστικό πολυωνυμο του κλειστού συστήματος θα είναι* :

$$
\begin{aligned}
a_k(s) &= \det(sI_n - A + BK) = \\
&= \det\{(sI_n - A)[I_n + (sI_n - A)^{-1}BK]\} \\
&= \det(sI_n - A)\ \det[I_n + (sI_n - A)^{-1}BK] \\
&= a(s)\ [1 + K(sI_n - A)^{-1}B]
\end{aligned}
$$

και συνεπώς θα έχουμε :

$$a_k(s) - a(s) = a(s)\ K(sI_n - A)^{-1}B$$

Εαν λάβουμε υπόψη μας την μέθοδο Faddeev (*κεφ*.2) *θα έχουμε ότι* :

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}\ [s^{n-1}I_n + s^{n-2}(A + a_{n-1}I_n) + s^{n-3}(A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I_n) + \cdots\ ]$$

Εξισώνοντας λοιπόν τους συντελεστές των δυνάμεων του s^i *στην παραπάνω σχέση έχουμε* :

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_{n-1} - a_{n-1} &= KB \\
\hat{a}_{n-2} - a_{n-2} &= KAB + a_{n-1}KB \\
\hat{a}_{n-3} - a_{n-3} &= KA^2B + a_{n-1}KAB + a_{n-2}KB \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

και πιο γενικά :

$$\hat{a} - a = K\ \ell\ \mathcal{Q}_-^T$$

όπου :

$$\hat{a} = [\hat{a}_{n-1} \cdots\ \hat{a}_1\ \hat{a}_0] \quad a = [a_{n-1} \cdots\ a_1\ a_0]$$

$$\ell = [B\ \ AB\ \ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$$

$$
\mathcal{Q}_- = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\
\alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

Επειδή ο πίνακας $\mathcal{Q}_{-}^{T}$ είναι πάντα αντιστρέψιμος διαπιστώνουμε ότι έχουμε ένα K, για αυθαίρετο διάνυσμα â, που να ικανοποιεί τις συνθήκες μου εαν και μόνο εαν ο πίνακας ℓ είναι αντιστρέψιμος ή ισοδύναμα εαν και μόνο εαν το σύστημα μου είναι ελέγξιμο και η λύση θα είναι :

$$\boxed{K = (\hat{a} - a)\ (\mathcal{Q}_{-}^{T})^{-1}\ \ell^{-1}}$$

Η φόρμουλα αυτή λέγεται Bass–Gura φόρμουλα.

Παράδειγμα 31 Εστω το σύστημα του παραδείγματος 21 που είναι ελέγξιμο και έχει ιδοτιμές τις {1,–1,3} :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Να βρεθεί $K = [k_1, k_2, k_3]$ τέτοιο ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση καταστάσεως :

$$u(t) = v(t) - K\,x(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ως ιδιοτιμές τις {–1,–2,–3}.

Λύσις Το σύστημα μου είναι ελέγξιμο και συνεπώς έχει λύση η οποία και είναι ***μοναδική*** και δίνεται από τον τύπο :

$$K = (\hat{a} - a)\ (\mathcal{Q}_{-}^{T})^{-1}\ \ell^{-1}$$

Εχουμε όμως ότι

$$\hat{a}(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = (s^2+3s+2)(s+3) = s^3+6s^2+11s+6$$

$$a(s) = (s^2-1)(s-3) = s^3-3s^2-s+3$$

και συνεπώς :

$$\hat{a} - a = [6\ \ 11\ \ 6] - [-3\ \ -1\ \ 3] = [9\ \ 12\ \ 3]$$

$$\mathcal{Q}_{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow (\mathcal{Q}_{-})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (\underline{\mathcal{Q}}^{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και από παράδειγμα 21 :

$$\ell = [\mathrm{B\ AB\ A^2B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \ell^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Αρα *θα έχουμε* :

$$\mathrm{K} = [9 \;\; 12 \;\; 3] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [9 \;\; 39 \;\; 129] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{K} = [9 \; -81 \; -120]$$ □

Σημείωση Μπορούμενα *παρατηρήσουμε ότι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει το σύστημα* :

$$\hat{a} - a = \mathrm{K}\,\ell\,\underline{\mathcal{Q}}^{T}$$

τουλάχιστο μια λύση είναι :

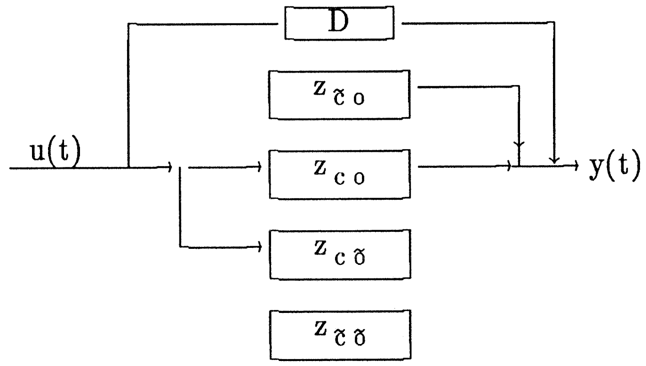
$$\hat{a} - a \in \mathrm{Image}(\ell\,\underline{\mathcal{Q}}^{T})$$

και συνεπώς είναι δυνατό παρόλο που το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο να υπάρχει λύση K *για έναν ιδιαίτερο τύπο διανυσμάτων* $\hat{a}$ *δηλ. να υπάρχει η ικανότητα παρ'όλο που το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο να ελέγξουμε ορισμένο πλήθος ιδιοτιμών αλλά όχι όλες.* Ποιός *είναι όμως αυτός* ο *τύπος των* $\hat{a}$ *που μπορώ να ελέγξω ή καλύτερα ποιές ιδιοτιμές του συστήματος μπορώ να μετατοπίσω προς ζητούμενες;* Το *ερώτημα αυτό φαίνεται εύκολα αν θεωρήσω ότι το σύστημα μου κάτω από κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να έρθει στην κατάσταση* :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} A_{co} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{c\bar{o}} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} b_{co} \\ b_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{όπου } z(t) = \begin{bmatrix} z_{co}(t) \\ z_{c\bar{o}}(t) \\ z_{\bar{c}o}(t) \\ z_{\bar{c}\bar{o}}(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [c_{co} \;\; 0 \;\; c_{\bar{c}o} \;\; 0]\, z(t) + \mathrm{D}u(t)$$

όπου A_{co}, $A_{\check{c}o}$, $A_{c\check{o}}$, $A_{\check{c}\check{o}}$, *είναι αντίστοιχα το ελέγξιμο και παρατηρήσιμο μέρος του πίνακα, το μη ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, το ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο και τέλος το μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο ή κάπως εικονικά :*



Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι μόνες καταστάσεις που δεν μπορούμε να επηρεάσουμε με μια είσοδο u(t) *είναι οι* $z_{\check{c}o}$ *και* $z_{\check{c}\check{o}}$ *και συνεπώς οι μόνες ιδιοτιμές* λ *(μη ελέγξιμες ιδιοτιμές) που δεν μπορούμε να μετατοπίσουμε είναι αυτές για τις οποίες έχουμε ότι* $\mathrm{rank}[\lambda I_n - A \;\; B] < n$. *Ενα σημαντικό λοιπόν πρόβλημα που υπάρχει στα συστήματα είναι όταν οι ιδιοτιμές που δεν είναι ελέγξιμες είναι ασταθείς και συνεπώς δεν μπορώ να αλλάξω το σύστημα μου από εσωτερικά ασταθές σε εσωτερικά ευσταθές.* □

Θεώρημα *Ενα συνεχές γραμμικό σύστημα* Σ *είναι ελέγξιμο εαν και μόνο εαν το υπό ανάδραση καταστάσεως σύστημα είναι ελέγξιμο.*

Απόδειξη *Ο πίνακας ελεγξιμότητας του κλειστού συστήματος θα είναι :*

$$\ell_k = [B \;\; (A-BK)B \;\; (A-BK)^2B \; \cdots \; (A-BK)^{n-1}B]$$

όπου :

$$(A-BK)B \quad = B\,(-KB) + AB = [B \;\; AB] \begin{bmatrix} -KB \\ I \end{bmatrix}$$

$$(A-BK)^2B \quad =(A-BK)(A-BK)B=B(KBKB-KAB)+AB(-KB)+A^2B=$$

$$= [B \;\; AB \;\; A^2B] \begin{bmatrix} -K(A-BK)B \\ -\;KB \\ I \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(A-BK)^3B &= AB[-K(A-KB)B] + A^2B(-KB) + A^3B - \\
&- B\{K[-K(A-BK)B]\} - B[KAB(-KB)] - B[KA^2B] = \\
&= [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B] \begin{bmatrix} -K(A-BK)^2B \\ -K(A-BK)B \\ -KB \\ I \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

....

και συνεπώς :

$$
\ell_k = \ell \begin{bmatrix} I & -KB & -K(A-BK)^2B & \cdots & -K(A\text{-}BK)^{n-1}B \\ 0 & I & -KB & \cdots & -K(A\text{-}BK)^{n-2}B \\ & & I & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}
$$

Αρα :

$$
\text{rank } \ell_k = \text{rank } \ell
$$

Το *ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε παρατηρώντας ότι* :

$$
\text{rank}[sI_n - A \;\; B] = \text{rank}[sI_n - A + BK \;\; B] \qquad \square
$$

Ενα εύλογο ερώτημα μετά από αυτό το θεώρημα είναι αν η παρατηρησιμότητα ενός συστήματος παραμένει μετά από ανάδραση καταστάσεως. Θα αναφέρουμε ένα αντιπαράδειγμα.

Παράδειγμα 32 *Εστω το σύστημα του παραδείγματος* 21 *που είναι ελέγξιμο και έχει ιδοτιμές τις* $\{1,-1,3\}$:

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

και έστω :

$$
y(t) = [\alpha \;\; \beta \;\; \gamma] \, x(t)
$$

Εστω ότι το σύστημα μου είναι παρατηρήσιμο ότι δηλ.

$$
\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = 3
$$

Εχουμε *όμως ότι* :

$$CA = [\alpha \;\; \beta \;\; \gamma] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [\beta\text{–}\gamma \;\; \alpha+2\gamma \;\; 3\gamma]$$

$$CA^2 = [\beta\text{–}\gamma \;\; \alpha+2\gamma \;\; 3\gamma] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [\alpha\text{–}\gamma \;\; \beta+5\gamma \;\; 9\gamma]$$

και συνεπώς θέλουμε :

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\text{–}\gamma & \alpha+2\gamma & 3\gamma \\ \alpha\text{–}\gamma & \beta+5\gamma & 9\gamma \end{bmatrix} =$$

$$=\alpha(9\alpha\gamma+2\gamma^2-3\gamma\beta-15\gamma^2)-\beta(9\beta\gamma-9\gamma^2-3\alpha\gamma+3\gamma^2)+\gamma(\beta^2+5\beta\gamma-\beta\gamma-5\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma\alpha+2\gamma^2)=$$

$$= -13\alpha\gamma^2 -3\alpha\beta\gamma +9\alpha^2\gamma +6\beta\gamma^2 -9\beta^2\gamma +3\alpha\beta\gamma -\alpha^2\gamma +\beta^2\gamma +4\beta\gamma^2 -3\gamma^3 -\alpha\gamma^2 =$$

$$= -14\alpha\gamma^2 + 8\alpha^2\gamma + 10\beta\gamma^2 - 8\beta^2\gamma - 3\gamma^3 \neq 0$$

Η *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι :*

$$G(s) = [\alpha \;\; \beta \;\; \gamma] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-3)(s^2-1)} [\alpha \;\; \beta \;\; \gamma] \begin{bmatrix} s(s-3) \\ (s-3) \\ 2-s \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha s^2 + (-3\alpha+\beta-\gamma)s - 3\beta+2\gamma}{(s^2-1)(s-3)}$$

Αν *θέσουμε* $\alpha=1$, $\beta=-22$ *και* $\gamma=-30$ *θα πάρουμε*

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s^2-1)(s-3)}$$

και

$$\det Q = -175680 \neq 0$$

και συνεπώς το ανοικτό σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Εστω η ανάδραση καταστάσεως

$$u(t) = v(t) - [9 \;\; -81 \;\; -120]x(t)$$

Το *κλειστό σύστημα θα έχει την μορφή* :

$$\dot{x}(t) = (A–BK)x(t) + Bv(t)$$

$$y(t) = (C–DK)x(t) + Dv(t)$$

δηλ αντί του A *θα έχω τον πίνακα* :

$$A–BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [9 \ \ -81 \ \ -120] = \begin{bmatrix} -9 & 82 & 120 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

και αντί του C *θα έχω τον* :

$$C_k = C–DK = [1 \ \ -22 \ \ -30] - 0K = [1 \ \ -22 \ \ -30]$$

και συνεπώς :

$$C_kA_k = [1 \ \ -22 \ \ -30] \begin{bmatrix} -9 & 82 & 120 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [-1 \ \ 22 \ \ 30]$$

$$C_kA_k{}^2 = [-1 \ \ 22 \ \ 30] \begin{bmatrix} -9 & 82 & 120 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [1 \ \ -22 \ \ -30]$$

Αρα

$$\mathrm{rank}\mathcal{Q}_k = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & -22 & -30 \\ -1 & 22 & 30 \\ 1 & -22 & -30 \end{bmatrix} = 1 < 3$$

και συνεπώς το κλειστό σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο σε αντίθεση με το ανοικτό σύστημα. Θα παρατηρήσουμε επίσης ότι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι η :

$$G_k(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+1}$$

και η πραγματική αιτία της μη παρατηρησιμότητας του κλειστού συστήματος είναι η απλοποίηση που γίνεται στην συνάρτηση μεταφοράς. □

Συμπέρασμα Η *παρατηρησιμότητα ενός συστήματος δεν παραμένει αμετάβλητη μετά από ανάδραση καταστάσεως.* □

Ενας άλλος τρόπος εύρεσης του διανύσματος K πιο φυσιολογικός είναι αυτός που χρησιμοποιείται στο παρακάτω παράδειγμα :

Παράδειγμα 33 Θεωρείστε το γραμμικό σύστημα :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Να βρεθεί διάνυσμα $K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιο ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση καταστάσεως :

$$u(t) = v(t) - Kx(t)$$

να έχω

α) ως ιδιοτιμές τις $\{-1, -1\}$,

β) την -1 πολλαπλότητας 2.

Λύσις Εστω

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

τότε ο πίνακας του κλειστού συστήματος θα είναι ο :

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1-\beta \\ 1-\gamma & -\delta \end{bmatrix}$$

και ο οποίος θα πρέπει να ταυτίζεται με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή θα πρέπει να έχουμε

$$-\alpha = -1 \ \land \ 1-\beta = 0$$

$$1-\gamma = 0 \ \land \ -\delta = -1$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1,\ \delta=1$$

και συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας K *θα είναι ο εξής* :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Ο *πίνακας του κλειστού συστήματος θα πρέπει να ταυτίζεται με τον πίνακα* :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή θα πρέπει να έχουμε

$$-\alpha = -1 \;\; \Lambda \;\; 1-\beta = 1$$

$$1-\gamma = 0 \;\; \Lambda \;\; -\delta = -1$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=1$$

και συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας K *θα είναι ο εξής* :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση που δεν μας ενδιέφερε η πολλαπλότητα των ιδιοτιμών του κλειστού συστήματος θα έπρεπε να εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του s *του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του κλειστού συστήματος*

$$\hat{a}(s) = \det\begin{bmatrix} s+\alpha & -1+\beta \\ -1+\gamma & s+\delta \end{bmatrix} = (s+\alpha)(s+\delta) - (\beta-1)(\gamma-1) =$$
$$= s^2 + (\alpha+\delta)s + \alpha\delta-\beta\gamma+\beta+\gamma-1$$

με τους συντελεστές των δυνάμεων του s *του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του ζητούμενου κλειστού συστήματος που στο παράδειγμα μας είναι το εξής* :

$$\hat{a}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

ή ισοδύναμα :

$$\alpha+\delta = 2 \;\; ; \;\; \alpha\delta-\beta\gamma+\beta+\gamma-1 = 1$$

δηλαδή υπάρχει μια πλειάδα λύσεων και συνεπώς διανυσμάτων K *που ικανοποιούν το ζητούμενο της άσκησης σε αντίθεση με τις περιπτώσεις μιας εισόδου μιας εξόδου.* □

Ακριβώς τα ίδια που ισχύουν στα συνεχή συστήματα ισχύουν και στα διακριτά συστήματα με την μόνη διαφορά ότι στα διακριτά αναζητούμε συνήθως διανύσματα K *τέτοια ώστε μετά από ανατροφοδότηση καταστάσεως το καινούργιο σύστημα να έχει ιδιοτιμές μικρότερες του* 1 *έτσι ώστε το σύστημα να είναι εσωτερικά ευσταθές.*

§10. *Ανάδραση εξόδου συνεχών και διακριτών γραμμικών συστημάτων.*

Πρόβλημα *Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα* Σ *που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω* :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (\Sigma)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $u(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *το* ***διάνυσμα εισόδου***, $u(t) \in C_p^i$, $x(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *είναι το* ***διάνυσμα ψευδοκατάστασης*** *και* $y(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *είναι το* ***διάνυσμα εξόδου.***

Εστω επίσης η ανατροφοδότηση εξόδου :

$$u(t) = Ky(t) + Nv(t)$$

όπου $K \in \mathbb{R}^{m\times p}$ *και* $N \in \mathbb{R}^{m\times w}$. *Να βρεθούν οι πίνακες εκείνοι* K *και* N *που θα μετατοπίσουν τις ιδιοτιμές του* Σ *από* $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n$ *σε* $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,..,\bar{\lambda}_n$. □

Το *καινούργιο σύστημα μου θα έχει την μορφή* :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\,[Ky(t)+Nv(t)] \Longrightarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\,[K(Cx(t))+Nv(t)] = (A+BKC)x(t) + BNv(t)$$

και συνεπώς θα πρέπει οι ιδιοτιμές του πίνακα :

$$A+BKC$$

να είναι οι ζητούμενες δηλ.

$$\det(sI_n-A-BKC) = (s-\bar{\lambda}_1)(s-\bar{\lambda}_2)\cdot\cdots\cdot(s-\bar{\lambda}_n)$$

Ιδιαίτερη μέθοδος επίλυσης δεν έχει βρεθεί ακόμα και γι'αυτό σε τέτοιες περιπτώσεις ακολουθούμε την λογική του παραδείγματος 33.

Παράδειγμα 34 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα* :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \;\; 0]x(t)$$

Να μετατοπίσετε τις ιδιοτιμές του παραπάνω συστήματος από $\{1,-1\}$ *σε* $\{-1,-1\}$ *μετά από ανάδραση εξόδου της μορφής* :

$$u(t) = Ky(t)$$

όπου $K \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Λύσις Εχουμε *ότι* :

$$A+BKC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} [1 \;\; 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} [1 \;\; 0] = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta+1 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος θα είναι :

$$\hat{a}(s) = \det\begin{bmatrix} s-\alpha & -1 \\ -\beta-1 & s \end{bmatrix} = s(s-\alpha) - (\beta+1) = s^2 - \alpha s - (\beta+1)$$

και άρα θα πρέπει να είναι ίσο με :

$$\hat{a}(s) := (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

δηλ.

$$-\alpha = 2 \;\; ; \;\; -(\beta+1) = 1 \Longrightarrow$$

$$\alpha = -2 \;\; ; \;\; \beta = -2$$

και άρα

$$K = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$ □

Ας σημειώσουμε ότι η ανάδραση εξόδου χρησιμοποιείται και για άλλα προβλήματα όπως τέλεια προσαρμογή προς πρότυπο, αποσύζευξη εισόδων–εξόδων κ.λ.π. Το *πρόβλημα είναι ακριβώς το ίδιο και για τα διακριτά συστήματα.*

Ενα *σημείο που πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ είναι ότι στο κλειστό σύστημα έπειτα από ανάδραση καταστάσεως θα έχω* :

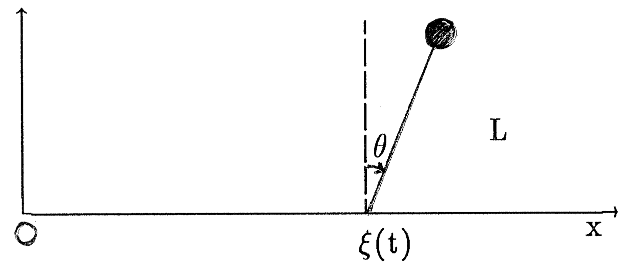
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[Ky(t)+Nv(t)] = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

και συνεπώς εαν το σύστημα μου ήταν παρατηρήσιμο δηλ. για γνωστή είσοδο $u(t)$ *και έξοδο* $y(t)$ *έχω την ευκαίρια να γνωρίζω την κατάσταση* $x(t)$ *και άρα για γνωστή είσοδο* $u(t) = Ky(t)+Nv(t)$ *(συνάρτηση γνωστών ποσοτήτων) και γνωστή έξοδο* $y(t)$ *θα έχω πάλι την ευκαίρια να γνωρίζω την είσοδο* $\hat{x}(t)$ *του κλειστού συστήματος και άρα η παρατηρησιμότητα παραμένει αμετάβλητη κάτω από ανάδραση εξόδου.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1 *Θεωρείστε την παρακάτω ράβδο μήκους* L, *της οποίας η κορυφή βρίσκεται στην άκρη του δακτύλου σας και την οποία προσπαθείται να ισορροπήσετε με κινήσεις προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση του άξονα* x.



Οι εξισώσεις του παραπάνω γραμμικοποιημένου δυναμικου συστήματος για μικρή γωνία θ είναι :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/L & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ \ 0]x(t)$$

όπου $u(t) = \dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$ *και* $x(t)^T = [x_1(t), x_2(t)]^T = [\theta(t) \ \ \dot{\theta}(t)]$.

α) Προσδιορίστε *τις ιδιοτιμές του παραπάνω συστήματος.* Είναι *το παραπάνω σύστημα εσωτερικά , εξωτερικά ευσταθές ;*

β) Μπορεί *το σύστημα να γίνει εσωτερικά ευσταθές εαν εφαρμόσω ανάδραση εξόδου της μορφής :*

$$u(t) = -Ky(t)$$

γ) Προσδιορίστε *μια ανάδραση καταστάσεως της μορφής :*

$$u(t) = -\,Kx(t) + v(t)$$

έτσι ώστε το σύστημα μου να γίνει εσωτερικά ευσταθές.

δ) Ποιο *είναι το φυσικό νόημα των απαντήσεων (β) και (γ) όσον αφορά την θέση χεριού–ματιού.*

Ασκηση 2 *Δίνονται τα παρακάτω δυο συστήματα :*

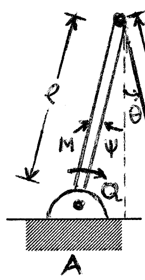
$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B u_i(t)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \quad i=1,2$$

α) Να *βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς της σύνδεσης σε σειρά των δυο συστημάτων.* (*θεωρείστε* $u_2(t)=y_1(t)$)

β) Να *βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς της παράλληλης σύνδεσης των δυο συστημάτων.* (*θεωρείστε* $u_1(t)=u_2(t)=u(t)$ *και* $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$)

Ακσηση 3 *Δίνεται το παρακάτω δυναμικό σύστημα :*



το *οποίο διέπεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :*

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} - \sigma^2\,\psi(t) - \eta^2[\psi(t) + \theta(t)] = u(t)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0{}^2\theta(t) + \varepsilon\,\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = 0$$

όπου

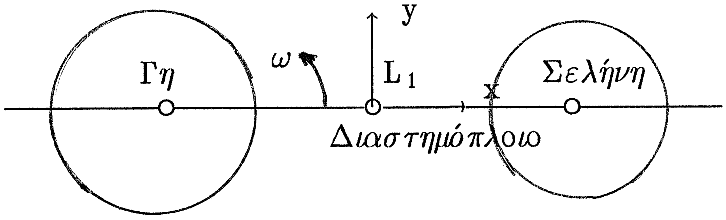
$$\sigma^2 = \frac{3g}{2\ell} \;\; ; \;\; \omega^2 = \frac{3mg}{M\ell} \;\; ; \;\; \varepsilon = \frac{\ell}{\alpha}$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{g}{\alpha} \;\; ; \;\; u = \frac{Q}{M\ell}$$

(Q = torque applied at A)

Υποθέστε *ότι* $\alpha=\ell$ *και* $m=M/3$ *και σχεδιάστε μια ανάδραση καταστάσεως τέτοια ώστε η μάζα* m *να σταματήσει μετά από λίγο χρόνο.* (*Θεωρείστε* $x_1(t)=\psi(t)$, $x_2(t)=\dot{\psi}(t)$, $x_3(t)=\theta(t)$, $x_4(t)=\dot{\theta}(t)$)

Ασκηση 4 *Θεωρείστε το παρακάτω δυναμικό σύστημα :*



το οποίο περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :

$$x^{(2)}(t) - 2\omega y^{(1)}(t) - 9\omega^2 x(t) = 0$$

$$y^{(2)}(t) + 2\omega x^{(1)}(t) + 4\omega^2 y(t) = u(t)$$

όπου

x(t) = radial position perturbation, y(t) = azimuthal position perturbation,

F = engine thrust in the y direction, m = satellite mass

α) *Είναι το σύστημα εσωτερικά ευσταθές ;*

β) *Εφαρμόσετε ανάδραση καταστάσεως έτσι ώστε να έχουμε ως ιδιοτιμές τις* $s=-3\omega$, $s=-4\omega$, $s = (-3 \pm 3i)\omega$. (*Θεωρείστε* $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=\dot{x}(t)$, $x_3(t)=y(t)$, $x_4(t)=\dot{y}(t)$)

<u>§11. Μετάβαση από πολυωνυμική περιγραφή σε περιγραφή στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.</u>

Πολλές φορές μας δίνονται πολυωνυμικές περιγραφές συστημάτων για μελέτη. Επειδή μια απευθείας μελέτη αυτών των συστημάτων με την μέχρι τώρα θεωρία είναι αδύνατη γι'αυτό χρειαζόμαστε συνήθως να μετατρέψουμε αυτά τα πολυωνυμικά συστήματα σε πιο γνώριμα συστήματα. Σίγουρα μια τέτοια μετατροπή δεν κρατάει αναλοίωτα όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος όπως έχει αποδειχθεί σε έρευνες, παρ'όλα αυτά θα δεχτούμε ότι δεν ενδιαφερόμαστε προς το παρόν για τα χαρακτηριστικά αλλά για την πραγματοποίηση αυτή του συστήματος ή αλλιώς για την μετατροπή αυτή. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια φόρμουλα μετατροπής ενός συστήματος από την πολυωνυμική του περιγραφή στην περιγραφή στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Θεωρείστε την κανονική περιγραφή συστημάτων :

$$\mathcal{T}(\rho)\,\xi(\mathrm{t}) = \mathcal{U}\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$$
$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathcal{V}\,\xi(\mathrm{t})$$

Εστω ότι :

$$\mathcal{T}(\rho) = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{t}_1(\rho) & \mathrm{t}_2(\rho) & \cdots & \mathrm{t}_\mathrm{n}(\rho) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

και έστω $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mathrm{n}$ οι μέγιστοι βαθμοί των στηλών $\mathrm{t}_1(\rho)\;\; \mathrm{t}_2(\rho)\; \cdots\; \mathrm{t}_\mathrm{n}(\rho)$ αντίστοιχα. Ο πίνακας $\mathcal{T}(\rho)$ γράφεται πιο αναλυτικά ως :

$$\mathcal{T}(\rho) = \mathcal{T}_{\mathrm{hc}}\mathrm{S}(\rho) + \mathcal{T}_{\mathrm{lc}}\,\Psi(\rho)$$

όπου :

$$\mathrm{S}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho^{\sigma_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \rho^{\sigma_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho^{\sigma_\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

και

$$\Psi^{\mathsf{T}}(\rho) = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} \rho^{\sigma_1-1} & \rho^{\sigma_1-2} & \cdots & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho^{\sigma_2-1} & \rho^{\sigma_2-2} & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho^{\sigma_\mathrm{n}-1} & \rho^{\sigma_\mathrm{n}-2} & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Βάσει των παραπάνω λοιπον έχουμε :

$$\mathcal{T}(\rho)\ \xi(t) = \mathcal{U}u(t) \Longrightarrow$$

$$[\mathcal{T}_{hc}S(\rho) + \mathcal{T}_{1c}\ \Psi(\rho)]\ \xi(t) = \mathcal{U}u(t) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{T}_{hc}S(\rho)\ \xi(t) = -\mathcal{T}_{1c}\ \Psi(\rho)\ \xi(t) + \mathcal{U}u(t) \Longrightarrow$$

Θεωρείστε την αλλαγή μεταβλητών :

$$x_1(t) = \xi_1(t)$$

$$x_2(t) = \dot{\xi}_1(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$x_{\sigma_1}(t) = \dot{\xi}_{\sigma_1-1}(t) = \dot{x}_{\sigma_1-1}(t)$$

$$x_{\sigma_1+1}(t) = \xi_2(t)$$

$$x_{\sigma_1+2}(t) = \dot{\xi}_2(t) = \dot{x}_{\sigma_1+1}(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{\sigma_1+\sigma_2}(t) = \dot{\xi}_{\sigma_2-1}(t) = \dot{x}_{\sigma_1+\sigma_2-1}(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot$$

ή πιο γενικά :

$$x_{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k+i}(t) = \xi_{k+1}{}^{(i-1)}(t) = \dot{x}_{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k+i-1}(t)$$

Θεωρείστε τους παρακάτω πίνακες :

$$E_c^0 = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
\left.\begin{matrix} 1 & & \\ & 1. & \\ & & \cdot\mathcal{T}_{hc}^{11} \end{matrix}\right\}\sigma_1 & \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 \cdots & \mathcal{T}_{hc}^{12} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 \cdots & \mathcal{T}_{hc}^{1n} \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & \cdot\cdot\mathcal{T}_{hc}^{21} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot\ \mathcal{T}_{hc}^{22} \end{matrix}\right\}\sigma_2 & \begin{matrix} 0 \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 \cdots & \mathcal{T}_{hc}^{2n} \end{matrix} \\ \hline
\cdots & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline
\begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots\mathcal{T}_{hc}^{n1} \end{matrix} & \begin{matrix} & 0 & \\ 0\,0 & & \mathcal{T}_{hc}^{n2} \end{matrix} & \cdots & \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot\ \mathcal{T}_{hc}^{nn} \end{matrix}\right\}\sigma_n
\end{array}\right]$$

$$A_c^0 = \text{block diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_i\times\sigma_i,\ i=1,..,n\right\}$$

$$B_c^0 = \text{block diag}\{[0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1],\ 1{\times}\sigma_i,\ i{=}1,..,n\}$$

$$C_c^0 = \text{block diag}\{[1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0],\ 1{\times}\sigma_i,\ i{=}1,..,n\}$$

Ο *όρος* block diag(·) *σημαίνει ένας πίνακας διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία άλλους πίνακες.* Τότε *η περιγραφή του συστήματος μας στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων θα είναι της μορφής :*

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου :

$$E = E_0 \quad ; \quad A = A_0 - B_0\mathcal{T}_{1c} \quad ; \quad B = B_0\mathcal{U} \quad ; \quad C = \mathcal{V}C_0$$

Σημείωση *Στην περίπτωση που ο πίνακας* E *είναι ομαλός θα έχουμε ότι :*

$$\dot{x}(t) = (E^{-1}A)x(t) + (E^{-1}B)u(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

που θα είναι η περιγραφή του συστήματος μας στον χώρο των καταστάσεων τώρα. □

Παράδειγμα 35 *Θεωρείστε ένα δυναμικό σύστημα* Σ *που περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :*

$$\begin{bmatrix} \rho^2 & \rho+1 \\ \rho^2-1 & \rho-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = I_2u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

Να *γίνει η περιγραφή του παραπάνω συστήματος στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.*

Λύσις *Φυσιολογικά θα έπρεπε να πάρουμε το σύστημα στην κανονική του μορφή (δες κεφ.*3) *αλλά επειδή η παραπάνω μορφή έχει τις παραπάνω προυποθέσεις πραγματοποίησης έχουμε :*

$$\mathcal{T}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho^2 & \rho+1 \\ \rho^2-1 & \rho-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$ *και* :

$$\mathcal{T}_{\mathrm{hc}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad \mathcal{T}_{\mathrm{lc}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αρα *έχουμε* :

$$\mathrm{E}_0 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad \mathrm{A}_0 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{B}_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad \mathrm{C}_0 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 - \mathrm{B}_0\mathcal{T}_{\mathrm{lc}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

και άρα το σύστημα μας θα είναι το :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \mathrm{x}(\mathrm{t}) + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \mathrm{u}(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathrm{x}(\mathrm{t})$$

Το *ίδιο πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί εαν θέταμε* :

$$\mathrm{x}_1(\mathrm{t}) = \xi_1(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{x}_2(\mathrm{t}) = \dot{\xi}_1(\mathrm{t}) = \dot{\mathrm{x}}_1(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{x}_3(\mathrm{t}) = \xi_2(\mathrm{t})$$

και ξαναγράφαμε τις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος με την βοήθεια των καινούργιων μεταβλητών $\mathrm{x}_1(\mathrm{t})$, $\mathrm{x}_2(\mathrm{t})$ *και* $\mathrm{x}_3(\mathrm{t})$. □

Σημείωση Η *ίδια μετατροπή των εξισώσεων από την κανονική μορφή στην μορφή του χώρου των καταστάσεων θα μπορούσε να εφαρμοσθεί και στα διακριτά συστήματα με την μόνη διαφορά ότι στον ορισμό των μεταβλητών θα είχαμε* :

$$\mathrm{x}_{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k+\mathrm{i}}(\mathrm{k}) = \xi_{\mathrm{k}+1}(\mathrm{k}+\mathrm{i}-1) = \mathrm{x}_{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k+\mathrm{i}-1}(\mathrm{k}+1)$$

§12. Ισοδύναμες περιγραφές.

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα στον χώρο των καταστάσεων :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Είναι πολλές φορές χρήσιμο να μεταρέψουμε το σύστημα μας σε μια πιο χρήσιμη μορφή αλλά με την προυπόθεση να διατηρήσουμε αναλλοίωτες τις ιδιότητες του συστήματος. Μια *τέτοια μεταφορά επιτυχαίνεται κάτω από τον μετασχηματισμό του διανύσματου καταστάσεως της μορφής :*

$$x(t) = T\,z(t)$$

όπου ο πίνακας T *είναι ομαλός.* Το *σύστημα μετά από τον μετασχηματισμό αυτό θα πάρει την μορφή :*

$$T\dot{z}(t) = ATz(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = CTz(t)$$

ή ισοδύναμα :

$$\dot{z}(t) = (T^{-1}AT)z(t) + (T^{-1}B)u(t)$$
$$y(t) = (CT)z(t)$$

ή

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t)$$
$$y(t) = \tilde{C}z(t)$$

Θεώρημα Ο *μετασχηματισμός της μορφής* $x(t) = T\,z(t)$ *διατηρεί αναλοίωτα τα παρακάτω στοιχεία :*

α) Την *ελεγξιμότητα του συστήματος.*

β) Την *παρατηρησιμότητα του συστήματος.*

γ) Τις *ιδιοτιμές του πίνακα* A.

δ) Την *συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.*

Απόδειξη

α) Παρατηρούμε ότι :

$$[\tilde{B}\ \ \tilde{A}\tilde{B} \cdots \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] = [T^{-1}B\ \ (T^{-1}AT)T^{-1}B \cdots (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B] =$$
$$= T^{-1}[B\ \ AB \cdots A^{n-1}B]$$

και συνεπώς η τάξη του πίνακα ελεγξιμότητας παραμένει αναλλοίωτη.

β) Παρατηρούμε ότι :

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CT(T^{-1}AT) \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T$$

και συνεπώς η τάξη του πίνακα παρατηρησιμότητας παραμένει αναλλοίωτη.

γ) Εχουμε ότι :

$$\det(sI_n - \tilde{A}) = \det(sI_n - T^{-1}AT) = \det(sT^{-1}T - T^{-1}AT) =$$
$$= \det[T^{-1}(sI_n - A)T] = \frac{1}{\det T}\det(sI_n - A)\det T = \det(sI_n - A)$$

γεγονός που δείχνει ότι οι ιδιοτιμές των δυο πινάκων είναι οι ίδιες. Μπορούμε *όμως να παρατηρήσουμε ότι, εαν ο πίνακας* U *είναι ο πίνακας των δεξιών ιδιοανυσμάτων του* A, V *ο πίνακας των αριστερών ιδιοανυσμάτων του* A *και* J *η διαγώνια μορφή του πίνακα* A, *τότε θα έχουμε ότι*

$$\tilde{A} = T^{-1}\,A\,T = [T^{-1}\,U\,]\,J\,[V\,T]$$

που σημαίνει ότι οι πίνακες $\tilde{A}$ *και* A *έχουν την ίδια διαγώνια μορφή ή ισοδύναμα τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες ακριβώς πολλαπλότητες.*

δ) Εχουμε *ότι* :

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}(s) \quad &= \tilde{C}(sI_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = CT(sI_n - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B = \\
&= CT(sT^{-1}T - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B = CT\,[T^{-1}(sI_n - A)T]^{-1}T^{-1}B = \\
&= CT\,T^{-1}(sI_n - A)^{-1}\,TT^{-1}B = C(sI_n - A)^{-1}B = \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

□

Σημείωση *Ενα άμεσο συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι εαν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε από τον τύπο* :

$$\tilde{\ell} = T^{-1}\,\ell$$

παρατηρούμε ότι μπορούμε κάλλιστα να βρούμε τον πίνακα μετασχηματισμού T *από τους πίνακες ελεγξιμότητας του συστήματος μας και αυτού που ψάχνουμε.* Το *ίδιο ισχύει και για τα παρατηρίσιμα συστήματα.* □

Σημείωση Το *ίδιο θεώρημα ισχύει και για τα διακριτά συστήματα εφόσον οι πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας είναι οι ίδιοι και η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον ίδιο τύπο.* □

Παράδειγμα 36 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα* :

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

Να *βρεθεί ένας* ομαλός *πίνακας* T *τέτοιος ώστε εαν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό* :

$$x(t) = T\,z(t)$$

το καινούργιο μου σύστημα να πάρει την εξής μορφή :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} z(t) + b\, u(t)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ *είναι οι* n <u>*διαφορετικές*</u> *ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος* :

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Λύσις *Σύμφωνα με τον παραπάνω μετασχηματισμό θα έχουμε ότι* :

$$\tilde{A} = T^{-1} A T$$

ή ισοδύναμα :

$$T\,\tilde{A} = A\,T \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_i T_{1i} = -\alpha_1 T_{1i} - \alpha_2 T_{2i} - \cdots - \alpha_n T_{ni}$$

$$\lambda_i T_{2i} = T_{1i}$$

$$\lambda_i T_{3i} = T_{2i}$$

....

$$\lambda_i T_{ni} = T_{n-1\,i} \qquad i=1,..,n$$

ή ισοδύναμα

$$T_{1i} = \lambda_i^{n-1} T_{ni}$$

$$T_{2i} = \lambda_i^{n-2} T_{ni}$$

....

$$T_{ni} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \qquad i=1,..,n$$

και συνεπώς για $T_{ni}=1$ *θα έχω ότι* ο *πίνακας μου θα είναι* ο :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

§13. Διαγράμματα βαθμίδων.

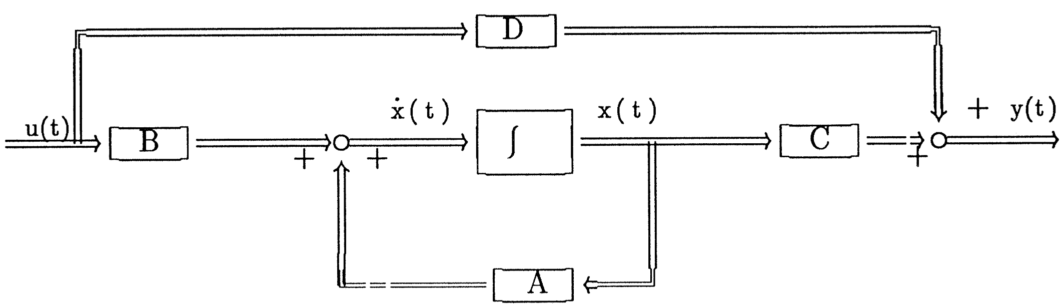
Τα διαγράμματα βαθμίδων μας δίνουν μια εποπτική εικόνα του συστήματος διότι μας δίνουν την συσχέτιση μεταξύ όλων των στοιχείων του συστήματος. Μια *ανφορά πάνω στα διαγράμματα βαθμίδων είχαμε κάνει στην* Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων 1. Εδώ *θα αναφέρουμε περισσότερο με παραδείγματα την απεικόνιση ενός συστήματος στον χώρο των καταστάσεων μέσω διαγραμμάτων βαθμίδος.*

Η *γενική περιγραφή ενός γραμμικού συστήματος στον χώρο των καταστάσεων είναι :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

και το αντίστοιχο διάγραμμα βαθμίδος :



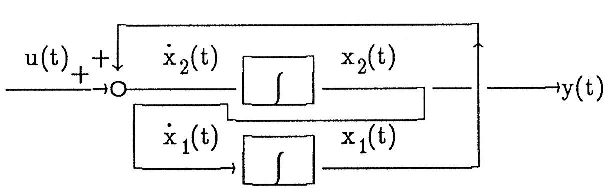
όπου η διπλή γραμμή χρησιμοποιείται γιατί τα στοιχεία u(t),x(t) *και* y(t) *είναι διανύσματα.*

Παράδειγμα 37 Να *γίνει το διάγραμμα βαθμίδος του παρακάτω συστήματος :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \ 1] \ x(t)$$

Λύσις Το *διάγραμμα βαθμίδος του παραπάνω συστήματος θα είναι :*



□

Παράδειγμα 38 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 1 \;\; 0]x(t)$$

α) Να *γίνει το διάγραμμα βαθμίδος του παραπάνω συστήματος.*

β) Να *βρεθεί* $K = [k_1, k_2, k_3]$ *τέτοιο ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση καταστάσεως :*

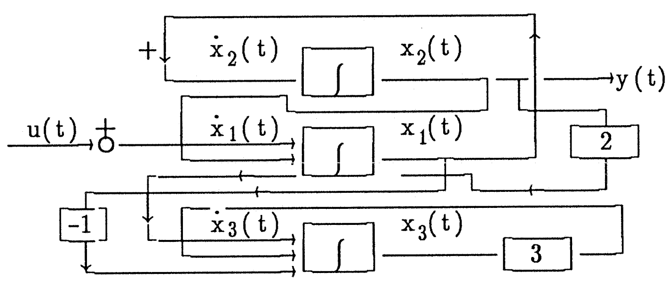
$$u(t) = v(t) - K\,x(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ως ιδιοτιμές τις $\{-1,-2,-3\}$.

γ) Να *γίνει το διάγραμμα βαθμίδος του κλειστού συστήματος.*

Λύσις

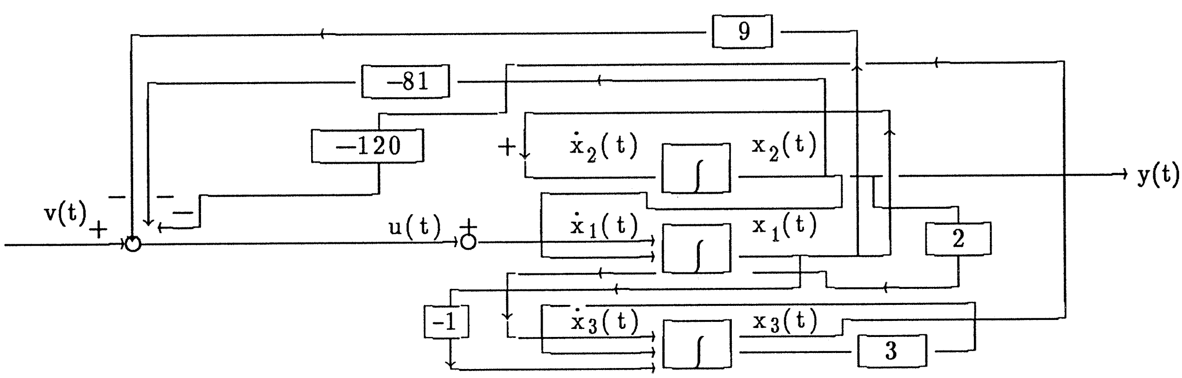
α) Το *διάγραμμα βαθμίδος του παραπάνω συστήματος θα είναι :*



β) Το *ερώτημα β) έχει απαντηθεί στο παράδειγμα* 31 *και το* K *θα είναι :*

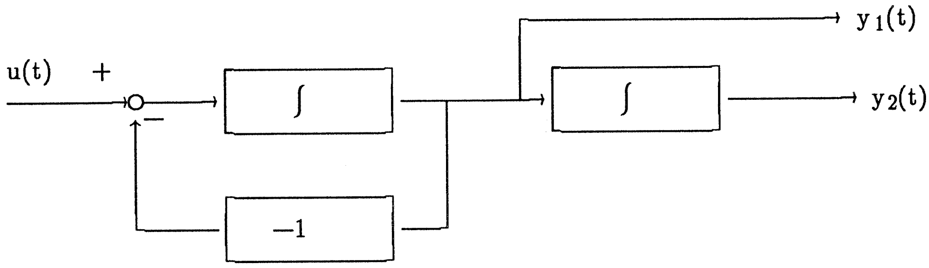
$$K = [9 \; -81 \; -120]$$

γ) Το *διάγραμμα βαθμίδος του καινούργιου συστήματος θα είναι :*

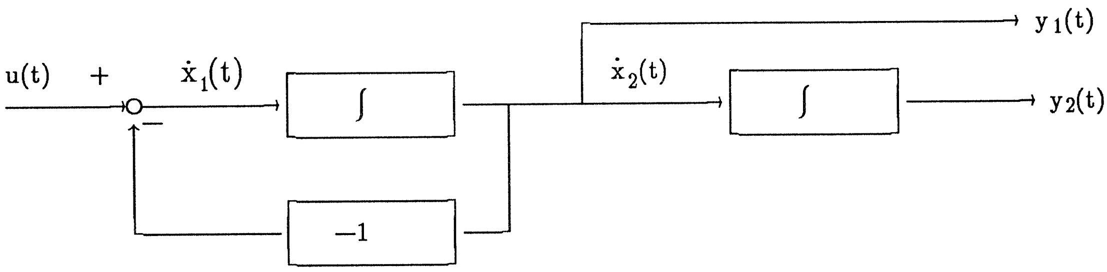


□

Παράδειγμα 39 Να *βρεθούν οι εξισώσεις καταστάσεως του παρακάτου συστήματος*



Λύσις Εστω :



Η *περιγραφή του παραπάνω συστήματος στον χώρο των καταστάσεων θα είναι* :

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \qquad \square$$

§14. Κανονικές πραγματοποιήσεις γραμμικών συστημάτων.

Θεωρείστε το γραμμικό σύστημα :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ορισμός Το παραπάνω γραμμικό σύστημα Σ λέμε ότι βρίσκεται στην Jordan **κανονική μορφή** (Jordan canonical form) εαν ο πίνακας A έχει την εξής μορφή :

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \qquad \text{όπου } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad i=1,2,..,k$$

και λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. □

Ορισμός Το παραπάνω γραμμικό σύστημα Σ λέμε ότι βρίσκεται στην ελέγξιμη μορφή (controllable companion form) εαν και μόνο εαν ο πίνακας A έχει την εξής μορφή :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

όπου :

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & x \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{i-1} & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & \cdots & x & x \end{matrix} \end{bmatrix}$$

□

Ορισμός Το *παραπάνω γραμμικό σύστημα* Σ *λέμε ότι βρίσκεται στην* ***παρατηρήσιμη μορφή*** (observable companion form) *εαν και μόνο εαν ο πίνακας* A *έχει την εξής μορφή* :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad C = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n]$$

όπου :

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{i-1} & \begin{matrix} 1 \\ x \\ \cdot \\ x \\ x \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad \square$$

Οι παραπάνω μορφές πινάκων είναι ορισμένες από τις πιο χαρακτηριστικές μορφές που μπορεί να πάρει το σύστημα μου κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $x(t) = T\,z(t)$. *Ενα σύστημα μπορεί να έρθει στην* **Jordan** ***κανονική μορφή*** *σύμφωνα με την θεωρία του κεφαλαίου* 1 (*υπάρχει πάντα ένας πίνακας* T *που αποτελείται από τα δεξιά ιδιονύσματα του πίνακα* A *και είναι τέτοιος ώστε ο πίνακας* $\tilde{A} = T^{-1}AT$ *να έχει την διαγώνιο μορφή*).

Σε αντίθεση με την Jordan *κανονική μορφή ένα σύστημα δεν μπορεί να έρθει στην ελέγξιμη ή την παρατηρήσιμη μορφή πάντα. Απαραίτητη προυπόθεση για να υπάρξει ένας πίνακας* T *τέτοιος ώστε να μπορεί ένα σύστημα να έρθει στην ελέγξιμη ή την παρατηρήσιμη μορφή είναι το σύστημα μου να είναι ελέγξιμο ή παρατηρήσιμο αντίστοιχα. Το ερώτημα είναι που βοηθούν αυτές οι συγκεκριμένες μορφές συστημάτων και με ποιόν μετασχηματισμό του ανύσματος καταστάσεως έχω την δυνατότητα να πάρω αυτές τις μορφές.*

Η *ελέγξιμη μορφή του συστήματος είναι πολύ χρήσιμη στο πρόβλημα επανατοποθέτησης των ιδιοτιμών του συστήματος μετά από ανάδραση καταστάσεως.* Πιο *συγκεκριμένα στην περίπτωση μιας εισόδου και μιας εξόδου έχουμε ότι :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

όπου

$$\alpha(s) = \; = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Μπορούμε *να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος όταν αυτό βρίσκεται στην ελέγξιμη μορφή είναι :*

$$\ell = [B \;\; AB \cdots A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & x & \cdots & x & x \\ 1 & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

και η τιμή του K *στο πρόβλημα της επανατοποθέτησης των ιδιοτιμών του συστήματος μετά από ανάδραση καταστάσεως θα είναι :*

$$K = (\hat{a}-a)\,(\ell\, Q^T_-)^{-1} = (\hat{a}-a) \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & x & \cdots & x & x \\ 1 & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= (\hat{a}-a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix} = (\hat{a}_0-a_0 \;\; \hat{a}_1-a_1 \cdots \hat{a}_{n-1}-a_{n-1})$$

Η *παρατηρήσιμη μορφή είναι πολύ χρήσιμη στον προσδιορισμό ενός παρατηρητού καταστάσεως ενός δηλαδή καινούργιου συστήματος που θα μας δώσει την δυνατότητα να προσδιορίσουμε την εσωτερική κατάσταση* x(t) *του συστήματος*. Α*παραίτητη συνθήκη για την κατασκευή ενός τέτοιου παρατηρητού καταστάσεως είναι να είναι το σύστημα μας παρατηρήσιμο*.

Παράδειγμα 39 *Δίνεται το παρακάτω σύστημα* :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Να *βρεθεί* $K = [k_1, k_2, k_3]$ *τέτοιο ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση καταστάσεως* :

$$u(t) = v(t) - K\,x(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ως ιδιοτιμές τις $\{-1,-2,-3\}$.

Λύσις Το *σύστημα μας είναι στην ελέγξιμη μορφή και συνεπώς είναι ελέγξιμο*. Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος δίνεται πάντα από την τελευταία γραμμή του πίνακα* A :

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = s^3 - 3s^2 - 2s + 1$$

Π*ρατηρούμε ότι οι συντελεστές* α_i *δεν είναι όλοι θετικοί και γι'αυτό* (*Κριτήριο* Routh) *το πολυώνυμο* α(s) *έχει θετικές ρίζες και συνεπώς το σύστημα μου είναι εσωτερικά ασταθές*.
Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του καινούργιου συστήματος θα θέλαμε να είναι το* :

$$\hat{\alpha}(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

και άρα το ζητούμενο διάνυσμα K *θα είναι* :

$$K = [6-1 \quad 11-(-2) \quad 6-(-3)] = [5 \quad 13 \quad 9] \qquad \square$$

Το *δεύτερο ερώτημα που θα μας απασχολήσει στην συνέχεια είναι κάτω από ποιόν μετασχηματισμό θα πάει το σύστημα μου στην ελέγξιμη ή στην κανονική μορφή*.

__*Περίπτωση μιας εισόδου μιας εξόδου*__

Είχαμε αναφέρει στο 12 κεφάλαιο ότι η σχέση μεταξύ των πινάκων ελεγξιμότητας δυο συστημάτων που συνδέονται διαμέσου ενός μετασχηματισμού T *είναι* :

$$\tilde{\ell} = \mathrm{T}^{-1}\ell$$

ή ισοδύναμα :

$$\mathrm{T} = \ell\,\tilde{\ell}^{-1}$$

όπου

$$\tilde{\ell} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & .0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & x \\ \vdots & \vdots & \dot{1} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot & \vdots \\ 0 & 1 & x & \cdots & x & x \\ 1 & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

και όπως φαίνεται από παραπάνω :

$$\tilde{\ell}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας T *θα είναι ο* :

$$\mathrm{T} = \ell\,\tilde{\ell}^{-1} = [\mathrm{B} \;\; \mathrm{AB} \;\cdots\; \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 40 *Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

α) Να *βρεθεί ένας πίνακας* T *τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό :*

$$x(t) = T\, z(t)$$

το καινούργιο σύστημα να είναι στην ελέγξιμη μορφή.

β) Να *βρεθεί* $K = [k_1, k_2, k_3]$ *τέτοιο ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση καταστάσεως :*

$$u(t) = v(t) - K\, x(t)$$

το καινούργιο σύστημα να έχει ως ιδιοτιμές τις $\{-1,-2,-3\}$.

Λύσις Εχουμε *ότι :*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A\,(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Θεωρείστε τον πίνακα ελεγξιμότητας :

$$\ell = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος θα είναι το :*

$$\alpha(s) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ -1 & s-1 & 0 \\ -1 & -1 & s-2 \end{bmatrix} = (s-1)(s-1)(s-2) + 1 + s-1 = s^3-4s^2+6s-2$$

και συνεπώς ο πίνακας T *θα είναι ο :*

$$T = \ell\, \tilde{\ell}^{-1} = [B\ \ AB \cdots A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πράγματι :

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

β) Το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο που θέλουμε να έχουμε είναι το* :

$$\hat{\alpha}(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

και συνεπώς το K *που αντιστοιχεί στην ελέγξιμη μορφή του συστήματος είναι το* :

$$\tilde{K} = [6 - (-2),\ 11 - 6,\ 6 - (-4)] = [8 \;\; 5 \;\; 10]$$

Το $\tilde{K}$ *αυτό όμως δεν είναι αυτό που ουσιαστικά ψάχνουμε. Λόγω του μετασχηματισμού θα έχουμε* :

$$u(t) = v(t) - K\,T\,z(t)$$

και συνεπώς :

$$\tilde{K} = K\,T \Longrightarrow$$

$$K = \tilde{K}\,T^{-1} = [8 \;\; 5 \;\; 10] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [-13 \;\; 10 \;\; 35] \qquad \square$$

Ενας *άλλος αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι ο παρακάτω* :

Αλγόριθμος

α) Υπολογίστε *τον πίνακα*

$$\ell = [B \;\; AB \;\cdots\; A^{n-1}B]$$

β) Υπολογίστε *τον* ℓ^{-1}

$$\ell^{-1} = \begin{bmatrix} \longleftarrow q_n \longrightarrow \\ \longleftarrow q_{n-1} \longrightarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow q_1 \longrightarrow \end{bmatrix}$$

γ) Υπολογίστε τον πίνακα :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1A \\ \vdots \\ q_1A^{n-1} \end{bmatrix}$$

δ) Ο ζητούμενος πίνακας Τ θα είναι ο :

$$T = Q^{-1}$$

Παράδειγμα 41 Δίνεται το γραμμικό σύστημα :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Να βρεθεί ένας πίνακας Τ τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό :

$$x(t) = T\, z(t)$$

το καινούργιο σύστημα να είναι στην ελέγξιμη μορφή.

Λύσις

α) Εχουμε ότι :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

και

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς :

$$\ell = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ℓ είναι ομαλός και συνεπώς το σύστημα είναι ελέγξιμο , οπότε μπορούμε να μιλάμε για δυνατότητα μετάβασης του συστήματος κάτω από έναν κατάλληλο μετασχηματισμό στην ελέγξιμη μορφή.

β) $$\ell^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -4 \\ 7 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

γ) $$q_1 = [-2 \;\; 1 \;\; -1]$$

$$q_1A = [-2 \;\; 1 \;\; -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [-1 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$q_1A^2 = [-1 \;\; 0 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [-1 \;\; 0 \;\; 1]$$

Αρα έχουμε :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1A \\ q_1A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δ) $$T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ □

Πολλές είσοδοι, πολλές έξοδοι.

Απαραίτητη προυπόθεση και εδώ είναι ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο. Παρακάτω δίνουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης του κατάλληλου μετασχηματισμού μετάβασης από το αρχικό σύστημα στην ελέγξιμη μορφή του συστήματος.

Εστω ότι ο πίνακας B *είναι της μορφής :*

$$B = [b_1 \, b_2 \cdots b_m]$$

όπου $b_1, b_2, \cdots, b_m$ *είναι οι στήλες του πίνακα* B.

Αλγόριθμος

α) *Θεωρείστε τον πίνακα :*

$$L = [b_1 \;\; Ab_1 \cdots A^{d_1-1}b_1 \;\; b_2 \;\; Ab_2 \cdots A^{d_2-1}b_2 \cdots b_m \;\; Ab_m \cdots A^{d_m-1}b_m]$$

έτσι ώστε οι στήλες $b_i, Ab_i, \cdots, A^{d_i-1}b_i$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητες καθώς και γραμμικά ανεξάρτητες των* $b_j, Ab_j, \cdots, A^{d_j-1}b_j$ *για* $j=1,..,i-1$ *ενώ η* $A^{d_i}b_i$ *είναι γραμμικά εξαρτημένη των* $b_j, Ab_j, \cdots, A^{d_j-1}b_j$ *για* $j=1,..,i$.

β) Υπολογίζω *τον* L^{-1}. Εσ*τω* :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \longleftarrow q_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow q_2 \longrightarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow q_n \longrightarrow \end{bmatrix}$$

γ) Ε*στω* :

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} d_i$$

και

$$q_k = \eta\ \sigma_k \text{ γραμμή του } L^{-1} \quad k=1,..,m$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad Q_i = \begin{bmatrix} q_i \\ q_i A \\ \vdots \\ q_i A^{d_i-1} \end{bmatrix}$$

δ) Ο *πίνακας* T *είναι ο εξής* :

$$T = Q^{-1}$$ □

Σημείωση *Οι δείκτες* d_1, d_2, ...,d_m *ονομάζονται* ***δείκτες ελεγξιμότητας*** (controllability indices) *του συστήματος*. □

Παράδειγμα 42 *Δίνεται το γραμμικό σύστημα :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0&1&1&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&0 \\ 0&1 \\ 1&0 \end{bmatrix} u(t)$$

Να *βρεθεί ένας πίνακας* T *τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω τον μςτασχηματισμό* :

$$x(t) = T\, z(t)$$

το καινούργιο σύστημα να είναι στην ελέγξιμη μορφή.

Λύσις Εχουμε *ότι* :

$$AB = \begin{bmatrix} 0&1&1&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&0 \\ 0&1 \\ 1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1 \\ 1&0 \\ 0&0 \\ 1&1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0&1&1&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1 \\ 1&0 \\ 0&0 \\ 1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&1 \\ 1&1 \\ 1&0 \\ 1&1 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0&1&1&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2&1 \\ 1&1 \\ 1&0 \\ 1&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3&2 \\ 1&1 \\ 1&1 \\ 2&1 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς ο *πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος θα είναι* ο :

$$\ell = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&2&1&3&2 \\ 0&0&1&0&1&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&1&1&2&1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος *και έχει πλήρη τάξη, άρα μπορεί το σύστημα μου να έρθει στην ελέγξιμη μορφή.*

α) Εχουμε *ότι*

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; A^2b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; A^3b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα 3 *πρώτα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ* $A^3b_1 = b_1 + A^2b_1$. *Αρα* $d_1=3$.

Εχουμε *επίσης ότι* :

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; A^2b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; A^3b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $Ab_2 = b_1$, $A^2b_2 = Ab_1$ *και* $A^3b_2 = A^2b_1$. *Αρα το μόνο που είναι γραμμικά ανεξάρτητο των* b_1, Ab_1 *και* A^2b_1 *είναι το* b_2. *Αρα* $d_2=1$ *και*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

β) Υπολογίζουμε *τον* L^{-1} :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

γ) Εχουμε *ότι* :

$$\sigma_1 = 3 \quad ; \quad \sigma_2 = 3+1 = 4$$

και

$$q_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1] \quad \textit{και} \quad q_2 = [-1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1]$$

Εχουμε *ότι* :

$$q_1A = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$q_1A^2 = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα Q *ως εξής* :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1A \\ q_1A^2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δ)

$$T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και οι πίνακες μου A *και* B *μετά από αυτούς τους μετασχηματισμούς γίνονται* :

$$\tilde{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\tilde{B} = QB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \square$$

Οσον αφορά την μετάβαση στην παρατηρήσιμη μορφή ενός συστήματος θεωρούμε το ***δυαδικό*** *σύστημα* :

$$\dot{\bar{x}}(t) = A^T\bar{x}(t) + C^T\bar{u}(t)$$

$$\bar{y}(t) = B^T\bar{x}(t) + D^T\bar{u}(t)$$

B*ρίσκω έναν πίνακα* $\bar{T}$ *που φέρνει το δυαδικό σύστημα στην ελέγξιμη μορφή* :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}^T\hat{x}(t) + \hat{C}^T\bar{u}(t)$$

$$\bar{y}(t) = \hat{B}^T\hat{x}(t) + \hat{D}^T\bar{u}(t)$$

Το *δυαδικό σύστημα του παραπάνω συστήματος θα είναι το σύστημα μου στην παρατηρήσιμη μορφή.*

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\ \hat{x}(t) + \hat{B}\ u(t)$$

$$y(t) = \hat{C}\ \hat{x}(t) + \hat{D}\ u(t)$$

και ο *πίνακας που μετασχηματίζει το σύστημα στην παρατηρήσιμη μορφή του θα είναι* ο $\bar{T}^T$. Ο*ι δείκτες* d_1, d_2, ...,d_m *που εμφανίζονται τώρα* ο*νομάζονται* ***δείκτες παρατηρησιμότητας*** (observability indices) *του συστήματος.*

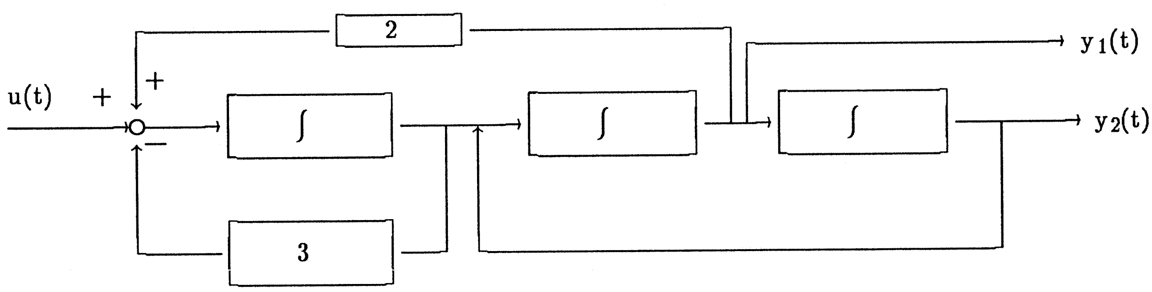
Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Ασκηση 1 Να σχηματισθεί ένα διάγραμμα ροής σημάτων του παρακάτω συστήματος

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & c_2 \cdots & c_{n-1} & 1 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & c_{n-2} & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t)$$

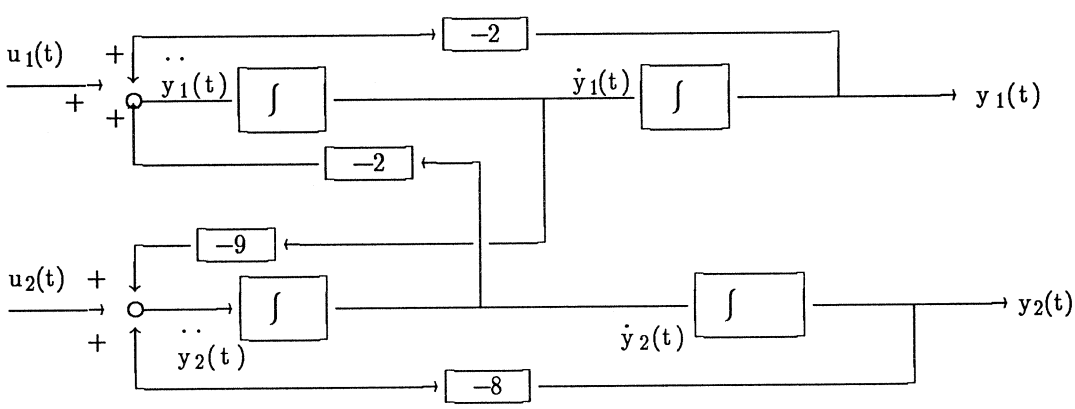
$$y(t) = [c_1 \; c_2 \cdots c_{n-1} \; 1]$$

Ασκηση 2 Να βρεθούν οι εξισώσεις καταστάσεως του παρακάτου συστήματος



Ασκηση 3

α) Να περιγραφεί το παρακάτω σύστημα



στο χώρο των καταστάσεων, ως εξής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Cx(t)$$

β) Είναι το παραπάνω σύστημα ευσταθές ;

γ) Να βρεθεί ο πίνακας

$$K = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & 1 & 1 \\ \kappa_3 & \kappa_4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

ο οποίος είναι τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω ανάδραση καταστάσεως στο παραπάνω σύστημα

$$u(t) = -Kx(t)$$

στο καινούργιο μου σύστημα να έχω δυο πόλους στο s=–1 και άλλους δυο πόλους στο s=–2.

Ασκηση 4 Εστω η περιγραφή ενός συστήματος Σ στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 1 \;\; 0]\, x(t)$$

α) Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο ; Αν ναι να βρεθεί ένας μετασχηματισμός $x(t) = T\, z(t)$ που να φέρνει το σύστημα μου στην ελέγξιμη μορφή.

β) Εστω ότι εφαρμόζουμε την παρακάτω ανάδραση καταστάσεως στο σύστημα Σ :

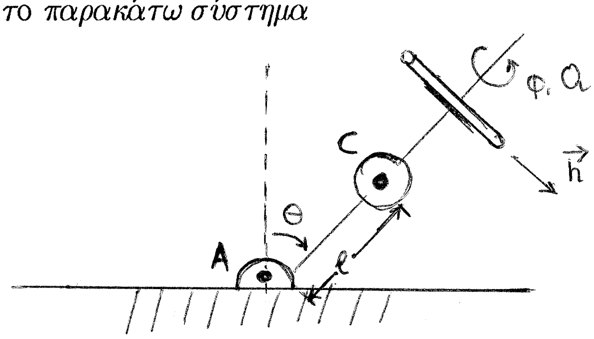
$$u(t) = -K\, x(t) + v(t) \quad K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του ανοικτού συστήματος, καθώς και για ποιές τιμές του $K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ το κλειστό σύστημα έχει ιδιοτιμή την τιμή –1 πολλαπλότητας 3 (Να χρησιμοποιηθεί η ελέγξιμη μορφή του συστήματος και στην συνέχεια να ανάγεται τα αποτελέσματα στο γνωστό σύστημα).

γ) Να γίνει το διάγραμμα ροής των σημάτων του ανοικτού καθώς και του κλειστού συστήματος για την ευρεθείσα τιμή του διανύσματος $K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ από το ερώτημα (β).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1 *Δίνετε το παρακάτω σύστημα*



που διέπεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$I\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = mg\ell\theta - h\,\frac{d\phi(t)}{dt}$$

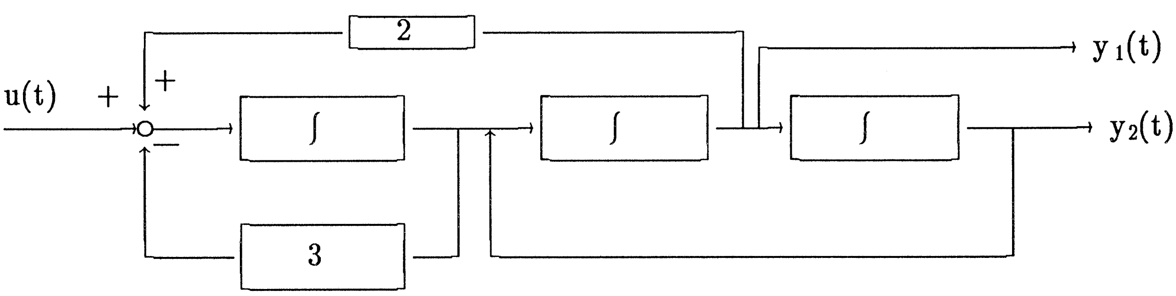
$$J\,\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = h\,\frac{d\theta(t)}{dt} + Q$$

α) Να *βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς από* $u(t)$ *σε* $\phi(t)$ *και από* $u(t)$ *σε* $\theta(t)$.

β) Να *δειχθεί ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο από* Q, *παρατηρήσιμο με* $\phi(t)$ *και μη παρατηρήσιμο με* $\theta(\tau)$.

γ) Να *δειχθεί ότι το σύστημα είναι πάντα ασταθές.*

Ασκηση 2 Να *βρεθούν οι εξισώσεις καταστάσεως του παρακάτου συστήματος*



Ασκηση 3 *Εστω το σύστημα* Σ

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\ 1\ 0\ 0\ ]x(t)$$

α) *Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς* G(s) *του παραπάνω συστήματος καθώς και οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.*

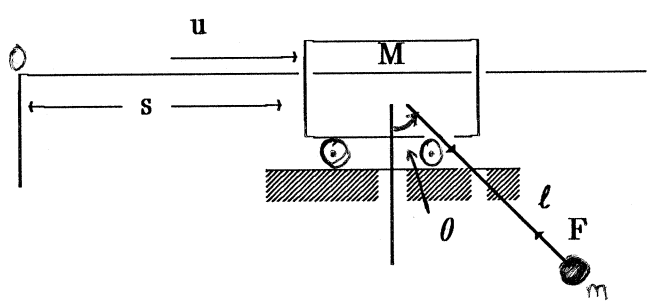
β) *Να βρεθεί η ολική απόκριση του συστήματος δεδομένου ότι* $x(0-) = [\ 1\ -1\ 0\ ]^T$ *και* $u(t)=\delta(t)$ *για* $t \geq 0-$.

γ) *Να αναφέρετε τον ορισμό της ελεγξιμότητας. Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο;*

δ) *Να σχηματισθεί ένα διάγραμμα ροής σημάτων του παραπάνου συστήματος.*

ε) *Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός του ανύσματος καταστάσεως* x(t) *που να φέρνει το παραπάνω σύστημα στην κανονική του μορφή.*

Ασκηση 4 *Δίνετε το παρακάτω σύστημα*



που διέπεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, εαν θεωρήσουμε ότι η γωνία $\theta(t)$ *είναι πολύ μικρή.*

$$M\ell \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + (m+M)g\theta(t) + u(t) = 0$$

$$M \frac{d^2 s(t)}{dt^2} - mg\theta(t) - u(t) = 0$$

α) Εαν η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

να περιγραφεί το παραπάνω σύστημα στον χώρο των καταστάσεων.

β) Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο, παρατηρήσιμο, ευσταθές, ναι ή όχι και γιατί;

γ) Εστω M=2m=1 και ℓ=g. Εαν το σύστημα μου είναι ασταθές, υπάρχει η δυνατότητα επανατοποθέτησης όλων των ιδιοτιμών του συστήματος κάτω από ανάδραση καταστάσεως της μορφής :

$$u(t) = -K\, x(t) + v(t) \qquad K \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$

έτσι ώστε το καινούργιο μου σύστημα να είναι ευσταθές ; Εφόσον τεκμηριώσετε την γνώμη σας, δημιουργήστε ένα δικό σας παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα αντίστοιχα, βάσει των δεδομένων του προβλήματος.

Ασκηση 5 Εστω η περιγραφή ενός συστήματος Σ στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

α) Να βρεθεί η ελεύθερη απόκριση του συστήματος δεδομένου ότι $x(0-)^T = [1 \;\; -1 \;\; 0]$.

β) Να βρεθεί ένας ομαλός πίνακας T τέτοιος ώστε εαν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό

$$x(t) = T\, z(t)$$

το καινούργιο μου σύστημα να έχει την διαγώνιο μορφή

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} z(t) + b\, u(t) \qquad b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

γ) *Να βρεθεί ανάδραση εξόδου της μορφής :*

$$u(t) = -K\, y(t) + v(t) \qquad K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

τέτοια ώστε το καινούργιο μου σύστημα να έχει ως ιδιοτιμές τις −1 *πολ/τας* 2 *και την* −2.

Ασκηση 6 *Δίνεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα :*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \;\; -1 \;\; 0]\, x(t)$$

α) *Είναι το παραπάνω σύστημα εσωτερικά ευσταθές ; εξωτερικά ευσταθές ;*

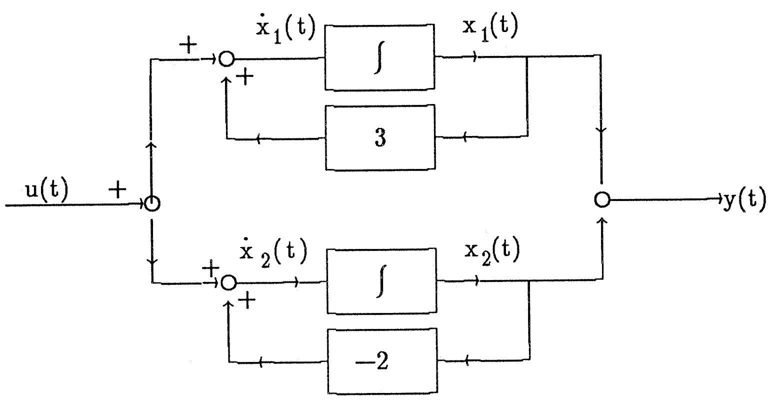
β) *Να βρείτε ένα διάνυσμα* $K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ *τέτοιο ώστε εαν εφαρμόσουμε ανάδραση καταστάσεως της μορφής :*

$$u(t) = -K\, x(t) + v(t)$$

το κλειστό σύστημα να έχει την ιδιοτιμή −1 *πολ/τας* 3.

Ασκηση 7

α) *Να βρεθεί η γενική περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων, του γραμμικού συστήματος που έχει το εξής διάγραμμα βαθμίδος*



β) Να γίνει το διάγραμμα βαθμίδος του παρακάτω γραμμικού συστήματος :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ \ -22 \ \ -30] \, x(t)$$

Ασκηση 8 Δίνεται το παρακάτω σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ \ 0 \ \ -1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

α) Είναι το παραπάνω σύστημα εσωτερικά ευσταθές, εξωτερικά ευσταθές ; Τι συμπεραίνεται όσον αφορά την σχέση εσωτερικής–εξωτερικής ευστάθειας;

β) Υπάρχει η δυνατότητα επανατοποθέτησης των ιδιοτιμών του παραπάνω συστήματος μέσω ανάδρασης καταστάσεως της μορφής

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) \qquad K \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

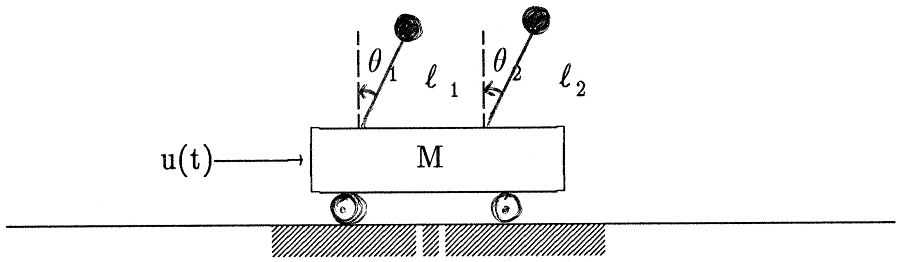
Εαν ναι να βρεθεί μια ανάδραση καταστάσεως της παραπάνω μορφής τέτοια ώστε εαν εφαρμοσθεί στο παραπάνω σύστημα το καινούργιο σύστημα θα έχει ως ιδιοτιμές τις $\{-1, -2, -3\}$;

Ασκηση 9 Εστω ένα καρότσι με μάζα M πάνω στο οποίο υπάρχουν δυο αντεστραμένα εκκρεμή με μήκη ℓ_1, ℓ_2 και μάζα m αμφότερα. Για μικρές γωνίες $|\theta_1|$, $|\theta_2|$ οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$M\,\frac{dv(t)}{dt} = -\,Mg\theta_1(t) - Mg\theta_2(t) + u(t)$$

$$m\,\left(\frac{dv(t)}{dt} + \ell_i\,\frac{d^2\theta_i(t)}{dt^2}\right) = mg\theta_i(t) \quad i=1,2$$

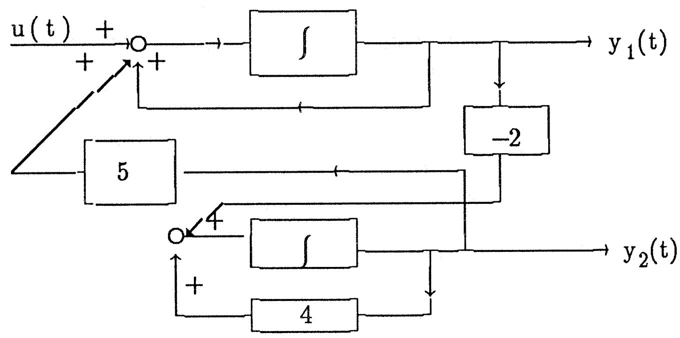
όπου v(t) *είναι η ταχύτητα κίνησης του καροτσιού και* u(t) *η εξωτερική δύναμη που επιδρά στο καρότσι.*



α) Είναι *δυνατός πάντοτε* ο *έλεγχος αμφοτέρων των εκκρεμών, ώστε να είναι κατακόρυφα* ;

β) Είναι *το σύστημα παρατηρήσιμο, θεωρώντας ως έξοδο την* $y(t)=\theta_1(t)$;

Ασκηση 10 *Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα βαθμίδος ενός συστήματος μιας εισόδου––δύο εξόδων* :



α) Να *γίνει η περιγραφή του παραπάνω συστήματος στον χώρο των καταστάσεων.*

β) Να *βρεθεί ανάδραση εξόδου της μορφής*

$$u(t) = -K\,y(t) \quad K\in\mathbb{R}^{1\times 2}$$

η οποία *εαν εφαρμοσθεί στο παραπάνω σύστημα,* το *καινούργιο σύστημα που θα πάρουμε θα έχει ως ιδιοτιμές τις* $\{-2, -3\}$.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Balakrishnan A.V., Elements of State–Space Theory of Systems, University Series in Modern Engineering, Optimization Software Inc., Publications Division, New York, 1983.

[2] Barnett S., Matrices in Control Theory, Van Nostrand Reinhold, New York 1972. Contains several results from the system theory literature.

[3] Bronson Richard, 1978, *Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις*, Schaum's Outline Series, McGraw–Hill, New York.

[4] Chen Chi–Tsong, Linear System Theory and Design, Holt Rinehart and Winston.

[5] Gantmacher F.R.,The Theory of Matrices,Chelsea Publishing Co.,New York, 1959,2 vols. Comprehensive ; contains ideas that are still the basis of new research in linear system theory.

[6] Kailath T., Linear Systems, Prentice Hall.

[7] MacDufee C.C., The Theory of Matrices, Springer, Berlin 1933 ; reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, 1950. Good Source for original references, with some unique results on matrix polynomials.

[8] Phillips Charles L. and Nagle Troy H., 1984, Digital Control System Analysis and Design, Prentice–Hall.

[9] Rosenbrock H.H., 1970, State–Space and Multivariable Theory, Thomas Nelson &Sons.

[10] Ross Shepley L., 1984, Differential Equations, John Willey & Sons.

[11] Vardulakis A.I., 1991, Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods, John Wiley & Sons.

[12] Verghese G.C., 1979, Infinite–Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems, Ph.D.Thesis, Stanford Univeristy.

[13] Wolovich W.A., 1974, Linear Multivariable Systems, Springer–Verlang.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Βαρδουλάκης Α.Ι., *Διδακτικές Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων* 2.

[2] Βαρδουλάκης Α.Ι. και Καραμπετάκης Ν., *Διδακτικές Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων* 1, Θεσσαλονίκη 1992.

[3] Καραμπετάκης Ν., *Εννοιες Ισοδυναμίας για Γραμμικά, Χρονικά Αμετάβλητα, Πολυμεταβλητά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Διδακτορική Διατριβή* (Κεφ.8), Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 1993.

[4] Κυβεντίδης Θ., *Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμοι 1,3, Θεσσαλονίκη 1987

[5] Λάκκη Κ., *Γραμμική Αλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 1984.

[6] Μποζαμπαλίδης Σ.Μ., *Γραμμική Αλγεβρα* , Μέρος Β, Θεσσαλονίκη 1984.

[7] Παρασκευόπουλος Π.Ν., *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου*, Τόμος 1,2 Αθήνα 1986.

[8] Φραγκούλης Γ., *Ανάλυση Γενικευμένων Ιδιόμορφων Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή*, Θεσσαλονίκη 1990.

Common Laplace Transform Pairs

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

$u(t) - u(t-a) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-as}}{s}, \qquad a > 0$

$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta(t - c) \leftrightarrow e^{-cs}, \qquad c > 0$

$e^{-bt} \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \qquad b$ real or complex

$t^n e^{-bt} \leftrightarrow \frac{n!}{(s+b)^{n+1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$\cos^2 \omega t \leftrightarrow \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$

$\sin^2 \omega t \leftrightarrow \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$

$e^{-bt} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s + b}{(s+b)^2 + \omega^2}$

$e^{-bt} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$

$t \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

$t \sin \omega t \leftrightarrow \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Properties of the Laplace Transform

Property	Transform Pair/Property
Linearity	$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(s) + bV(s)$
Right shift in time	$x(t - c)u(t - c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s), \quad c > 0$
Time scaling	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$
Multiplication by a power of t	$t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}X(s), \quad n = 1, 2, \ldots$
Multiplication by an exponential	$e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a)$, a real or complex
Multiplication by $\sin \omega t$	$x(t) \sin \omega t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s + j\omega) - X(s - j\omega)]$
Multiplication by $\cos \omega t$	$x(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s + j\omega) + X(s - j\omega)]$
Convolution	$(x * v)(t) \leftrightarrow X(s)V(s)$
Integration	$x^{(-1)} \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$
Differentiation in the time domain	$\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0)$
Second derivative	$\ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$
nth derivative	$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$
Initial-value theorem	$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ $\dot{x}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^2X(s) - sx(0)]$ $x^{(n)}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^{n+1}X(s) - s^nx(0) - s^{n-1}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(n-1)}(0)$
Final-value theorem	If $\lim_{t\to\infty} x(t)$ exists, then $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$